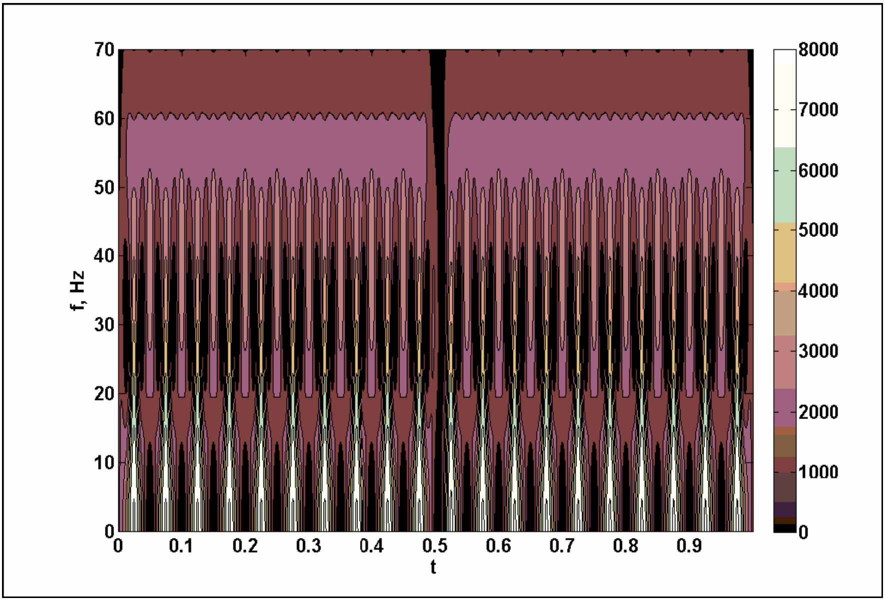
Латыпова Н.В., Тучинский Л.И.

РЯДЫ ФУРЬЕ



Ижевск 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО "Удмуртский государственный университет"
Кафедра математического анализа

Н.В. Латыпова, Л.И. Тучинский

РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно–методическое пособие

Ижевск 2011

УДК 517(075).8
ББК 22.161я73
Л 77

Рекомендовано к изданию Учебно–методическим советом УдГУ.

Н. В. Латыпова, Л. И. Тучинский

Л 77 Ряды Фурье: учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет" , 2011. 80 с.

Предлагаемое учебно–методическое пособие посвящено изучению одного из разделов курса математического анализа — рядам Фурье. Приводятся основные понятия и теоремы теории рядов Фурье, которые подробно иллюстрируются решениями примеров, а также рассматриваются некоторые вопросы теории интегралов Фурье. Предназначено для студентов математического факультета.

УДК 517(075).8
ББК 22.161.1я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Задача замены произвольной сложной или неудобной для вычислений функции давно занимала умы математиков. Частично она была решена с помощью интерполяции и аппроксимации функций и регрессии. Но все эти математические приемы имеют один серьезный недостаток: они плохо подходят для периодических колебаний. А между тем развитие теории колебаний, а в дальнейшем электротехники и радиотехники настойчиво требовало нового аппарата приближения периодических функций. Над решением этой задачи бились многие ученые прошлого. Открытие в этой области удалось сделать в 1807 году Фурье, который нашел и обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, при котором такой ряд был способен приближать любую периодическую функцию (при некоторых ограничениях).

Изучаемая в настоящем пособии проблема разложения функции в ряд Фурье является обобщением и развитием идеи вектора по базису. Ряды Фурье представляют собой тригонометрические многочлены, построенные на основе периодической базисной функции — синусоиды (и косинусоиды, представляющей собой синусоиду с фазовым сдвигом в $\pi/2$). Благодаря этому ряды Фурье способны приближать периодические функции. В рядах Фурье используются синусоиды и косинусоиды с кратными частотами, получившие название — гармоники. Сложные колебания разлагаются на отдельные гармонические колебания (гармонические составляющие, или гармоники). Сам же процесс разложения периодической функции на гармоники называют гармоническим анализом.

Данная работа в основном посвящена изучению тригонометрических рядов Фурье. Важность рассматриваемой темы обусловлена той большой ролью, которую играют её приложения не только в математике, но и в механике, физике и других научных дисциплинах. Обширность темы не позволяет сколько-нибудь полно охватить даже классические её аспекты, так что ограничимся наиболее простыми теоремами, отражающими общую ситуацию. Коснемся также и некоторых вопросов теории интеграла Фурье.

Используемый аппарат находит широкое применение в таких курсах, как Функциональный анализ, Физика, Теоретическая механика, Уравнения математической физики и др.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения модуля: ОК-6, ОК-8, ОК-15, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-9, ПК-16, ПК-18, ПК-27. Студент должен изучить представленный теоретический материал. Для закрепления и лучшего усвоения материала предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

§1. Периодические функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T, если выполнено равенство $f(x \pm T) = f(x),\ \forall x$.

Если $T = 2\omega$ является периодом, то и $T = 2n\omega$ $(n \in \mathbb{Z})$ также является периодом. Через 2ω будем обозначать наименьший положительный период. В силу периодичности можно рассматривать отрезок $[a, a + 2\omega]$ при любом a. Отрезок $[a, a + 2\omega]$, длина которого при любом a равна 2ω, также будем называть периодом. Как правило, используют отрезки $[0, 2\omega]$, $[-\omega, \omega]$.

Лемма 1. *Если $f(x)$ — периодическая с периодом 2ω и интегрируемая на любом отрезке $[c, d]$ функция, то* $\forall\ a, b$ $\displaystyle\int\limits_a^{a+2\omega} f(x)dx = \int\limits_b^{b+2\omega} f(x)dx.$

Доказательство. Представим интеграл в виде суммы

$$\int\limits_b^{b+2\omega} f(x)dx = \int\limits_b^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{a+2\omega} f(x)dx + \int\limits_{a+2\omega}^{b+2\omega} f(x)dx \doteq A.$$

В первом интеграле, поменяв местами пределы интегрирования, а в третьем — сделав замену $x - 2\omega = t,\ dx = dt,\ x = t + 2\omega$ и используя периодичность функции $f(x)$, имеем

$$A = -\int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_a^{a+2\omega} f(x)dx + \int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{a+2\omega} f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Лемма 1 означает, что интеграл от функции $f(x)$ по любому периоду принимает одно и то же значение. Поэтому в таком случае можно ограничиваться одним стандартным периодом, в качестве которого обычно берется отрезок $[0, 2\omega]$ или отрезок $[-\omega, \omega]$.

§2. Ортогональные системы функций

Определение 2. Две функции f и g называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$, если $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$

Если $f(x) \equiv 0$, то это равенство выполняется для каждой функции $g(x)$. Другими словами, функция $f(x) \equiv 0$ ортогональна ко всем функциям $g(x)$. В силу известного неравенства Буняковского для интегралов

$$\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)dx$$

из условия $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Следовательно, функция f, для которой $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$, играет роль нулевой функции $f(x) \equiv 0$. Поэтому такая функция тоже считается нулевой. В противном случае, когда $\int\limits_a^b f^2(x)dx \neq 0$, функция f по определению считается ненулевой. Очевидно, что нулевая функция не является единственной. Действительно, если изменить значение функции в одной точке, то по-прежнему будем иметь, что $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$. Однако для непрерывной функции ситуация становится иной.

Лемма 2. *Если* $f \in \mathbb{C}[a,b]$ *и* $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$, *то* $f(x) \equiv 0,\ \forall\ x \in [a,b]$.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $\exists\ x_0 \in [a,b]:\ f(x_0) \neq 0$. Тогда $f^2(x_0) > 0$, а значит, $\exists c > 0 : f^2(x_0) \geqslant c$. В силу непрерывности функции $\exists\ O_\delta(x_0)\ \forall\ x \in O_\delta(x_0):\ f^2(x) \geqslant c$.

Рассмотрим $0 = \int\limits_a^b f^2(x)dx \geqslant \int\limits_{O_\delta(x_0)} f^2(x)dx \geqslant c \int\limits_{O_\delta(x_0)} dx = c \cdot 2\delta > 0$. Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и $f(x) \equiv 0,\ \forall\ x \in [a,b]$. ■

Итак, существует единственная непрерывная функция $f(x) \equiv 0$, для которой $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$.

Определение 3. Система ненулевых функций $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...\}$ (конечная или бесконечная) называется *ортогональной на отрезке* $[a,b]$, если на этом отрезке ортогональны любые две функции этой системы, то есть $\int\limits_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$ при $i \neq j$.

Определение 4. Если интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 1$, то функция f называется *нормированной* на $[a,b]$.

Определение 5. Если все функции ортогональной системы $\{\psi_i\}$ нормированы, то такая система $\{\psi_i\}$ называется *ортонормированной*, то есть $\int\limits_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

Примеры

1. Система функций $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$ называется *тригонометрической системой*. Покажем, что эта система функций ортогональна на $[-\pi, \pi]$.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x \Big] dx =$$

$$= \frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n+m} \cos(n+m)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \text{ где } n \neq m,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\sin(n-m)x + \sin(n+m)x \Big] dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x \Big] dx = 0, \text{ где } m \neq n,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{1}{2n} \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{1}{2n} \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \pi.$$

Таким образом, получаем, что тригонометрическая система является ортогональной системой функций, но не является нормированной.

2. Системы функций $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$ и $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$ ортогональны на отрезке $[0, \pi]$.

Упражнение. Проверьте утверждения примера 2.

3. Пусть $P_0(x)=1$. Обозначим

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right],\quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Многочлены $P_n(x)$ называются *многочленами Лежандра.* Если ввести обозначение $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n=x^{2n}+\dots$, то имеем представление многочлена в виде $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}Q_{2n}^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\Big[2n(2n-1)...(n+1)x^n+\dots\Big]$. С другой стороны, $Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$ имеет корни ±1 кратности n, $Q_{2n}'(x)=n(x^2-1)^{n-1}2x$ — корни ±1 кратности $n-1$, $Q_{2n}''(x)$ — корни ±1 кратности $n-2$, $\dots$, $Q_{2n}^{(k)}(x)$ — корни ±1 кратности $n-k$.

Покажем ортогональность полиномов Лежандра на отрезке $[-1,1]$. Рассмотрим сначала интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}x^kQ_{2n}^{(n)}(x)dx$ и воспользуемся формулой интегрирования по частям: $u=x^k$, $du=kx^{k-1}dx$, $dv=Q_{2n}^{(n)}(x)dx$, $v=Q_{2n}^{(n-1)}(x)$. Получим

$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=\frac{1}{2^n n!}\left[x^kQ_{2n}^{(n-1)}(x)\Big|_{-1}^{1}-k\int_{-1}^{1}x^{k-1}Q_{2n}^{(n-1)}(x)dx\right]=$$

$$=-\frac{k}{2^n n!}\left(x^{k-1}Q_{2n}^{(n-2)}(x)\Big|_{-1}^{1}-(k-1)\int_{-1}^{1}x^{k-2}Q_{2n}^{(n-2)}(x)dx\right)=\dots=$$

$$=\frac{(-1)^kk!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q_{2n}^{(n-k)}(x)dx=\frac{(-1)^kk!}{2^n n!}Q_{2n}^{(n-k-1)}(x)\Big|_{-1}^{1}=0,\ (n>k).$$

Так как любой многочлен имеет вид $P_m(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}a_kx^k$, то при $n>m$

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{m}a_kx^kP_n(x)dx=\sum_{k=0}^{m}a_k\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=0,$$

в силу полученного выше, так как $k\leqslant m<n$.

Таким образом, система многочленов Лежандра — ортогональная система.

Рассмотрим

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{n}a_kx^kP_n(x)dx=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx.$$

Уже доказано, что при $k < n$ имеет место соотношение $\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = 0$, и так как $a_n = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}\int\limits_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx. \qquad (1)$$

Ранее также было получено соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\int\limits_{-1}^{1} Q_{2n}^{(n-k)}(x)dx,$$

которое при $k = n$ принимает следующий вид:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{(-1)^n n!}{2^n n!}\int\limits_{-1}^{1} Q_{2n}(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n}\int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\int\limits_{-1}^{1}(-1)^n(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}}\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}} I_n,$$

где $I_n = \int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$. Выведем для вычисления I_n рекуррентную формулу. Несложные преобразования дают нам:

$$I_n = \int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^{n-1}(1-x^2)dx = \int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^{n-1}dx - \int\limits_{0}^{1}x^2(1-x^2)^{n-1}dx =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x(1-x^2)^{n-1} d\left(1-x^2\right) = I_{n-1} + \frac{x}{2}\frac{(1-x^2)^n}{n}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2n}\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

В результате имеем $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{2n} I_n$ или $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$. Применив n раз последовательно эту реккурентную формулу, находим

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \cdots = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} I_0,$$

где $I_0 = \int\limits_0^1 dx = 1$. Так что окончательно получаем $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx =$

$$= \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{[2n(2n-2)\cdots 2]^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}.$$

Остается подставить значение I_n в (1), что дает

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2}{2n+1} \neq 0.$$

Упражнение. Выведите дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра. (*Указание.* Искомое дифференциальное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка.)

Пусть система $\{\varphi_i\}$ ортогональна на отрезке $[a,b]$ и $\varphi_i \not\equiv 0, \ \forall\ i$. Тогда $\int\limits_a^b \varphi_i^2(x)dx = d_i^2$, где d_i — некоторое положительное число. Обозначим через $\psi_i = \dfrac{\varphi_i}{d_i}$. Тогда при $i \neq j$

$$\int\limits_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \int\limits_a^b \frac{\varphi_i}{d_i}\frac{\varphi_j}{d_j}dx = \frac{1}{d_i d_j}\int\limits_a^b \varphi_i\varphi_j dx = 0.$$

С другой стороны, $\int\limits_a^b \psi_i^2(x)dx = \int\limits_a^b \left(\dfrac{\varphi_i}{d_i}\right)^2 dx = \dfrac{1}{d_i^2}\int\limits_a^b \varphi_i^2(x)dx = \dfrac{1}{d_i^2}d_i^2 = 1$. Следовательно, $\{\psi_i\}$ — ортонормированная система.

Вывод. Любая ортогональная система из ненулевых функций может быть преобразована в ортонормированную систему.

Пример. Система функций $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\right.$ $\left.\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots\right\}$ является ортонормированной на отрезке $[\pi, \pi]$.

§3. Тригонометрические многочлены

Определение 6. *Тригонометрическим многочленом* порядка n называют функцию вида: $T_n(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где a_k, b_k —

некоторые числа. Если $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$, то n определяет порядок (степень) тригонометрического многочлена.

Свойства тригонометрических многочленов

1. Произведение двух тригонометрических многочленов порядков n и m соответственно есть тригонометрический многочлен порядка $n+m$: $T_n(x) \cdot T_m(x) = T_{n+m}(x)$.

2. Если $T_n(x)$ — тригонометрический многочлен порядка n, то $\forall y \in \mathbb{R}$, $T_n(x+y)$ — также тригонометрический многочлен порядка n.

3. Если $T_n(x)$ — четная функция, то $b_k = 0$, $\forall\ k = 1, \ldots, n$. Если $T_n(x)$ — нечетная функция, то $a_k = 0$, $\forall\ k = 0, \ldots, n$, т.е. чётный тригонометрический многочлен состоит только из косинусов, а нечетный — только из синусов.

4. Производная тригонометрического многочлена порядка n $(n \geqslant 1)$ есть тригонометрический многочлен того же самого порядка.

Упражнение. Докажите свойства тригонометрических многочленов.

Определение 7. Два корня x_1 и x_2 называются *эквивалентными корнями* тригонометрического многочлена $T_n(x)$, если $x_1 - x_2 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Напомним, что если x_1 — корень кратности k функции f, то имеем $f(x_1) = f'(x_1) = \ldots = f^{(k-1)}(x_1) = 0,\ f^{(k)}(x_1) \neq 0$.

Теорема 1 (о количестве корней тригонометрического многочлена). *Тригонометрический многочлен порядка n имеет не более $2n$ попарно неэквивалентных корней с учётом их кратности.*

Доказательство. Пусть $T_n(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$. По формулам Эйлера имеем равенства: $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$. Подставим их в многочлен $T_n(x)$ и приведем подобные: $T_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = e^{-inx} \sum\limits_{k=0}^{2n} d_k e^{ikx}$, где $c_k = \dfrac{a_k}{2} - \dfrac{b_k}{2i}$ при $k = -n, -(n-1), \ldots, -1, c_0 = a_0, c_k = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{b_k}{2i}$ при $k = 1, 2, \ldots, n, d_k = c_{k-n}$.

Обозначим $e^{ix} = z$. Тогда $T_n(x) = e^{-inx} \sum\limits_{k=0}^{2n} d_k z^k = e^{-inx} P_{2n}(z)$, где $P_{2n}(z) = \sum\limits_{k=0}^{2n} d_k z^k$ — алгебраический многочлен степени $2n$. Заметим, что $e^{-inx} \neq 0$.

1) Если x_1 — корень тригонометрического многочлена $T_n(x)$, то $T_n(x_1) = 0$, а значит, $P_{2n}(e^{ix_1}) = 0$, то есть $z_1 = e^{ix_1}$ — корень алгебраического многочлена $P_{2n}(z)$.

2) Если x_1 и x_2 — неэквивалентные корни многочлена $T_n(x)$, то $T_n(x_1) = T_n(x_2) = 0$, где $x_1 - x_2 \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. В этом случае $z_1 = e^{ix_1}$ и $z_2 = e^{ix_2}$ — различные корни $P_{2n}(z)$, так как имеем выкладки $z_1 - z_2 = $ $= e^{ix_1} - e^{ix_2} = e^{ix_2}\left(e^{i(x_1-x_2)} - 1\right) \neq 0$, поэтому $z_1 \neq z_2$.

3) Покажем, что если x_1 — корень кратности k тригонометрического многочлена $T_n(x)$, то $z_1 = e^{ix_1}$ — корень $P_{2n}(z)$ кратности не меньшей k.

Имеем равенство $P_{2n}(e^{ix}) = e^{inx}T_n(x)$. Продифференцируем его:

$$P_{2n}^{'}(e^{ix})e^{ix}i = ine^{inx}T_n(x) + e^{inx}T_n^{'}(x)$$

и умножим обе части полученного равенства на $(-ie^{-ix})$. Получим

$$P_{2n}^{'}(e^{ix}) = ne^{i(n-1)x}T_n(x) - ie^{i(n-1)x}T_n^{'}(x).$$

Дифференцируя последнее равенство, можно получить представление для $P_{2n}^{''}(e^{ix})$, $P_{2n}^{'''}(e^{ix})$ и т.д. Методом математической индукции легко установить, что они имеют вид: $P_{2n}^{(m)}(e^{ix}) = \sum\limits_{j=0}^{m} F_{mj}(x)T_n^{(j)}(x)$, где $F_{mj}(x)$ — некоторые непрерывные функции.

Упражнение. Докажите данное равенство с помощью ММИ.

Из последнего равенства тогда следует, что если x_1 — корень многочлена $T_n(x)$ кратности k, то $T_n^{(j)}(x_1) = 0$ при $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Тогда $z_1 = e^{ix_1}$ — корень $P_{2n}(z)$ кратности не меньшей k, т.к. $P_{2n}^{(m)}(z_1) = 0$ при $0 \leqslant m \leqslant k-1$.

Таким образом, установили, что каждому корню тригонометрического многочлена $T_n(x)$ соответствует корень $z_1 = e^{ix_1}$ алгебраического многочлена $P_{2n}(z)$ не меньшей кратности, причем неэквивалентным корням $T_n(x)$ соответствуют различные корни $P_{2n}(z)$. А по основной теореме алгебры количество корней алгебраического многочлена $P_{2n}(z)$ с учетом кратности равно $2n$. А значит, столько же корней будет и у тригонометрического многочлена $T_n(x)$. ■

Замечание. Если x_1 — некоторый корень $T_n(x)$, то для него можно найти неэквивалентный корень $x_2 \in [a, a+2\pi)$. Все неэквивалентные корни можно поместить в $[a, a+2\pi)$ и в формулировке теоремы можно говорить о количестве корней тригонометрического многочлена, принадлежащих промежутку $[a, a+2\pi)$.

§4. Тригонометрический ряд Фурье

Если крутить прикрепленный к веревке камень с постоянной скоростью (числом оборотов в единицу времени), то проекция камня на ось ординат и есть синусоида. Синусоидальные колебания характерны для многих физических объектов, их генерируют, например, электроннные генераторы сигналов. Ввиду их неизменности во времени, симметрии и гладкости синусоидальные колебания получили название гармонических колебаний.

Часто синусоидальная функция в виде сигнала, которая описывает колебательные процессы (гармоники), записывается как функция от времени: $y(t) = A\sin(2\pi\nu t + \varphi)$, где $A > 0$ — амплитуда колебания, ν — её частота выраженная в Гц (Гц — одно полное колебание в одну секунду), φ — фазовый сдвиг (начальная фаза). Нередко используется и понятие круговой частоты синусоиды $\omega = 2\pi\nu$, тогда синусоида записывается в виде $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Поэтому можно определять частоту как величину обратную периоду, то есть период колебания $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Используя формулу синуса суммы, имеем $A\sin(\omega t + \varphi) = a_\omega \cos\omega t + b_\omega \sin\omega t$.

Определение 8. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2}$$

где a_k и b_k — некоторые числа, называется *тригонометрическим рядом.*

Теорема 2. *Если тригонометрический ряд* (2) *равномерно сходится на промежутке* $[-\pi, \pi]$ *и* $f(x)$ *— сумма этого ряда, то коэффициенты находятся по формулам*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \ \ (n = 0, 1, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \ \ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. В силу периодичности ряд (2) равномерно сходится на всей числовой прямой. Все члены ряда непрерывные функции. Следовательно, $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{4}$$

Почленно проинтегрируем равенство (4) на $[-\pi, \pi]$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx\right),$$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$. Откуда $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Равенство (4) умножим на $\cos nx$:

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx.$$

Так как $|\cos nx| \leqslant 1$ и при умножении на ограниченную функцию равномерная сходимость ряда не нарушается, то полученный ряд можно проинтегрировать: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx =$

$$= \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right).$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx = 0,\ \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \pi, & k = n, \end{cases}$$

имеем $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi$. Откуда $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$.

Аналогично, умножив равенство (4) на $\sin nx$ и проинтегрировав, можно получить формулу для b_n.

Упражнение. Проделайте выкладки для b_n. ■

Определение 9. Формулы (3) называются формулами Эйлера–Фурье, а числа a_k, b_k — *коэффициентами Фурье*. Тогда *тригонометрическим рядом Фурье* называется ряд вида $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$ с коэффициентами a_k, b_k, вычисляемыми по формулам (3). Выражение $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ будем считать n-м членом этого ряда, а $S_n = S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$ является n-й частичной суммой ряда.

Замечание. Так как $f(x)$, $\cos kx$, $\sin kx$ — 2π-периодические функции, то можно промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ заменить произвольным промежутком $[a, a + 2\pi]$.

Рассмотрим все функции $f(x)$, для которых $\int\limits_a^b f(x)dx$ является собственным (не имеет особых точек) или является абсолютно сходящимся, то есть $\int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$. Класс функций такого типа обозначают $\overline{\mathcal{L}}[a,b]$ или $\overline{\mathcal{L}}_1[a,b]$. Заметим, функции такого вида имеют конечное число особых точек (см. подробнее [10]).

Так как $|f(x)\cos kx| \leqslant |f(x)|$ и $|f(x)\sin kx| \leqslant |f(x)|$, то формулы (3) будут определены для всех функций $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$.

Взяв произвольную функцию $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$, мы можем для неё построить ряд Фурье: $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где a_k и b_k выражаются по формулам (3). Но нет никакой гарантии, что этот ряд сходится. А если он сходится, то не обязательно, что он сходится к данной функции $f(x)$. Поэтому будем писать:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

§5. Лемма Римана об осцилляции

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_a^b \cos pxdx = \left.\frac{\sin px}{p}\right|_a^b = \frac{\sin bp - \sin ap}{p} \to 0 \text{ при } p \to \infty,$$

$$\int\limits_a^b \sin pxdx = -\left.\frac{\cos px}{p}\right|_a^b = \frac{\cos ap - \cos bp}{p} \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Рассмотрим $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$ Тогда

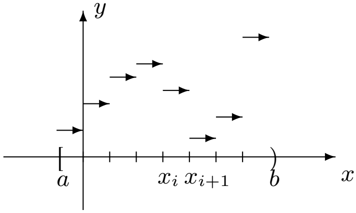
$$\int\limits_a^b f(x)\cos pxdx = \int\limits_a^b \cos pxdx \to 0 \text{ при } p \to \infty,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\sin pxdx = \int\limits_a^b \sin pxdx \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Определение 10. Функция f называется *ступенчатой* на $[a,b)$, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,x_{i+1}),$$

на каждом из которых функция $f(x)$ постоянна: $f(x)=c_i,\ \forall\ x\in[x_i,x_{i+1})$.



Пусть $f(x)$ — произвольная ступенчатая функция. Тогда

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x),\ \text{где}\ c_i=const,\ f_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in[x_i,x_{i+1}),\\0,\ x\notin[x_i,x_{i+1}).\end{cases}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\cos pxdx=\sum_{i=1}^{n}c_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f_i(x)\cos pxdx\to 0\ \text{при}\ p\to\infty,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\sin pxdx=\sum_{i=1}^{n}c_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}f_i(x)\sin pxdx\to 0\ \text{при}\ p\to\infty.$$

Вывод. Если $f(x)$ — ступенчатая функция, то

$$\int\limits_a^b f(x)\cos pxdx\to 0\ \text{при}\ p\to\infty,\ \int\limits_a^b f(x)\sin pxdx\to 0\ \text{при}\ p\to\infty.$$

Лемма 3 (Римана об осцилляции). *Если функция* $f(x)\in\overline{\mathcal{L}}_1[a,b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\cos pxdx\to 0,\ \int\limits_a^b f(x)\sin pxdx\to 0$ *при* $p\to\infty$.

Доказательство. 1) Если $f(x)$ — ступенчатая функция, то требуемые соотношения доказаны (см. выкладки перед формулировкой леммы).

2) Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ из пространства $\overline{\mathcal{L}}_1[a,b]$. Докажем, что для $\forall f(x)\in\overline{\mathcal{L}}_1[a,b],\ \forall\varepsilon>\ 0,\ \exists\ \phi$ — ступенчатая функция такая, что $\int\limits_a^b|f-\phi|dx<\varepsilon$.

Из $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}_1[a,b] \Rightarrow \exists \int\limits_a^b |f(x)|dx < \infty$. Для доказательства достаточно ограничиться случаем, когда функция $f(x)$ имеет только две особые точки, причем на концах a и b. Согласно определению интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|dx = \lim\limits_{\xi\to a, \eta\to b} \int\limits_\xi^\eta |f(x)|dx$. Откуда

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \xi, \eta \in [a,b] :\ \int\limits_a^\xi |f(x)|dx + \int\limits_\eta^b |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Так как на промежутке $[\xi, \eta)$ особых точек нет, то $\int\limits_\xi^\eta f(x)dx$ — собственный интеграл. Тогда $\int\limits_\xi^\eta f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} s_T$, где $s_T = \sum\limits_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ — нижняя сумма Дарбу, $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1})} f(x)$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. А значит,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ T : \lambda < \delta \Rightarrow \left| \int\limits_\xi^\eta f dx - s_T \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Построим на $[a,b]$ ступенчатую функцию:

$$\phi(x) = \begin{cases} m_i,\ x \in [x_i, x_{i+1}),\ i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0,\ x \in [a, \xi) \cup [\eta, b]. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_a^b \phi(x)dx = \int\limits_\xi^\eta \phi(x)dx = \sum\limits_{i=1}^n \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} m_i dx = \sum\limits_{i=1}^n m_i \Delta x_i = s_T$. Рассмотрим $\int\limits_a^b |f - \phi|dx = \int\limits_a^\xi |f|dx + \int\limits_\xi^\eta |f - \phi|dx + \int\limits_\eta^b |f|dx$. Заметим, что $\phi(x) \leqslant f(x),\ \forall\ x \in [\xi, \eta)$, а значит, $f(x) - \phi(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_\xi^\eta |f - \phi|dx = \int\limits_\xi^\eta (f - \phi)dx = \int\limits_\xi^\eta f(x)dx - \int\limits_\xi^\eta \phi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \phi(x)dx = \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) = \int\limits_{\xi}^{\eta} f(x)dx - s_T.$$

Поэтому в силу неравенств (5)–(6) имеем $\int\limits_a^b |f - \phi|dx < \varepsilon$. Таким образом, построена ступенчатая функция $\phi(x)$, удовлетворяющая требуемому соотношению: $\int\limits_a^b |f - \phi|dx < \varepsilon$.

3) В силу доказанного для $\forall \varepsilon > 0$ найдется ступенчатая функция $\phi(x)$ такая, что $\int\limits_a^b |f - \phi|dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим теперь

$$\int\limits_a^b f(x)\cos px dx = \int\limits_a^b (f - \phi + \phi)\cos px dx = \underbrace{\int\limits_a^b (f - \phi)\cos px dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_a^b \phi \cos px dx}_{I_2}.$$

Оценим каждое слагаемое.

$$|I_1| = \left| \int\limits_a^b (f - \phi)\cos px dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f - \phi| \cdot \big|\cos px\big| dx \leqslant \int\limits_a^b |f - \phi| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\phi(x)$ — ступенчатая функция, то $I_2 = \int\limits_a^b \phi(x)\cos px dx \to 0$ при $p \to \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p \geqslant N :\ \left| \int\limits_a^b \phi(x)\cos px dx \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\cos px dx \right| \leqslant |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall p \geqslant N.$$

Мы получили, что $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p \geqslant N :\ \left| \int\limits_a^b f(x)\cos px dx \right| < \varepsilon \Rightarrow$ $\int\limits_a^b f(x)\cos px dx \to 0$ при $p \to \infty$.

Аналогично доказывается второй предел. ■

Упражнение. Проделайте выкладки для $\int\limits_a^b f(x)\sin pxdx$.

Следствие. *Если функция $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$, то её коэффициенты Фурье стремятся к нулю при $k \to \infty$, то есть*

$$a_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \to 0,\ \ b_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \to 0 \text{ \textit{при} } k \to \infty.$$

§6. Интеграл Дирихле. Принцип локализации Римана

Пусть 2π-периодическая функция $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$. Тогда $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|dx < \infty$ и $f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$, где коэффициенты Фурье имеют вид $a_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$ $(k = 0,1,\ldots)$, $b_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$ $(k = 1,2,\ldots)$.

Обозначим через $S_n = S_n(f,x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$ — n-ю частичную сумму тригонометрического ряда Фурье.

Лемма 4. $\forall \alpha \neq 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$:

$$\mathcal{D}_n(\alpha) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение $\mathcal{D}_n(\alpha)\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2} =$

$$= \sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2} + \left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) + \cdots +$$

$$+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha.$$

Если $\alpha\neq 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, то $\dfrac{\alpha}{2}\neq\pi n\Rightarrow\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$. Тогда, разделив обе части полученного равенства на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, имеем требуемое соотношение (7). ■

Рассмотрим

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx\doteq A$$

и подставим в него значения коэффициентов Фурье (3):

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt\cos kx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt\sin kx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathcal{D}_n(t-x)dt.$$

Таким образом, получаем $S_n(f,x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathcal{D}_n(t-x)dt$. Сделаем подстановку $t-x=z,\ dt=dz:$

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x}f(z+x)\mathcal{D}_n(z)dz=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(z+x)\mathcal{D}_n(z)dz,$$

так как подынтегральная функция 2π-периодическая и можно использовать лемму 1. В итоге имеем

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\mathcal{D}_n(t)dt. \tag{8}$$

Выражение $\mathcal{D}_n(t)$ принято называть *ядром Дирихле*. Представим интеграл как сумму двух интегралов

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}f(t+x)\mathcal{D}_n(t)dt+\int\limits_{0}^{\pi}f(t+x)\mathcal{D}_n(t)dt\right).$$

В первом интеграле заменим t на $-t$ и используем четность $\mathcal{D}_n(t)$:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{\pi}^{0} f(x-t)\mathcal{D}_n(-t)dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Big[f(x-t)+f(x+t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt.$$

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Big[f(x-t)+f(x+t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt. \tag{9}$$

Данный интеграл называют *интегралом Дирихле*.

Рассмотрим функцию $f(x) \equiv 1$. Её коэффициенты Фурье будут равны $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$, а значит, $S_n \equiv 1$, $\forall n$. В этом случае имеем $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2\mathcal{D}_n(t)dt = 1$. Откуда $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\mathcal{D}_n(t)dt = \dfrac{1}{2}$, или, учитывая четность $\mathcal{D}_n(t)$, имеем $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_n(t)dt = 1$. Возьмем произвольное число s_0 и умножим на него обе части равенства $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} s_0\mathcal{D}_n(t)dt = \dfrac{s_0}{2}$. Тогда

$$S_n(f,x) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Big[f(x+t)-f(x-t)-2s_0\Big]\mathcal{D}_n(t)dt. \tag{10}$$

Возьмём $0 < \delta < \pi$ и представим в виде суммы $S_n(f,x) =$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\delta}\Big[f(x+t)+f(x-t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt + \int\limits_{\delta}^{\pi}\Big[f(x+t)+f(x-t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt\right).$$

Покажем, что второе слагаемое есть $o(1)$ при $n \to \infty$. Распишем для этого $\mathcal{D}_n(t)$ по формуле (7), что дает

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}\Big[f(x+t)+f(x-t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt = \int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\dfrac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Убедимся далее, что указанный интеграл удовлетворяет всем условиям леммы Римана об осцилляции.

В самом деле, во–первых, так как $t \in [\delta, \pi]$ и $x \in [-\pi, \pi]$, то $x + t$, $x - t \in [-2\pi, 2\pi]$, а значит, функция $f(x+t) + f(x-t) \in \overline{\mathcal{L}}_1[-2\pi, 2\pi]$. Во–вторых, $\sin\dfrac{t}{2} \neq 0$ на $[\delta, \pi]$. Следовательно, функция $\dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ непрерывна и интегрируема в собственном смысле на $[\delta, \pi]$. Тогда подынтегральная функция $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \in \overline{\mathcal{L}}_1[\delta, \pi]$. Применив лемму Римана, получаем требуемое утверждение:

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

В итоге, имеем для любого $\delta > 0$

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \Big[f(x+t) + f(x-t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt + o(1)\ (n \to \infty). \tag{11}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему, которую называют принципом локализации Римана.

Теорема 3 (Принцип локализации Римана). *Поведение суммы $S_n(f,x)$ в точке x при $n \to \infty$ зависит только от поведения функции f в любой достаточно малой окрестности точки x.*

Аналогично из формулы (10) можно получить при $\forall\ \delta > 0$

$$S_n(f,x) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} \Big[f(x+t) + f(x-t) - 2s_0\Big]\mathcal{D}_n(t)dt + o(1)\ (n \to \infty). \tag{12}$$

Упражнение. Проведите выкладки для формулы (12).

Отметим исключительное значение принципа локализации. Из него следует, что если две абсолютно интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой достаточно малой окрестности Δ точки x, то ряды Фурье этих функций в точке x ведут себя (в смысле сходимости) одинаково. Парадоксальность данного факта заключается в том, что вне окрестности Δ функции f и g могут как угодно отличаться друг от друга и, следовательно, будут иметь разные ряды Фурье, так как их коэффициенты Фурье $a_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $b_k(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$ и

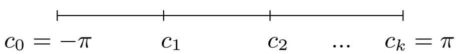
$a_k(g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx dx$, $b_k(g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx dx$, вообще говоря, не совпадают. Удивительный результат!

§7. Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке

1. 2π-периодические функции

Вопрос о сходимости ряда Фурье в точке x — это вопрос существования конечного $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x) = \dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int\limits_{0}^{\delta}\Big[f(x+t)+f(x-t)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt$. Для его решения мы воспользуемся понятием кусочно–дифференцируемой функции.

Определение 11. 2π-периодическая функция $f(x)$ называется *кусочно–дифференцируемой* на отрезке $[-\pi,\pi]$, если можно указать разбиение $-\pi = c_0 < c_1 < \dots < c_k = \pi$ этого отрезка на конечное число частей $[c_m, c_{m+1}]$, $m = 0, 1, \dots, k-1$, для которого выполнены следующие условия:
1) функция $f(x)$ дифференцируема внутри каждой части $[c_m, c_{m+1}]$;
2) во всех точках c_m, $m = 0, 1, \dots, k-1$ существуют конечные левые и правые пределы $f(c_m - 0)$ и $f(c_m + 0)$;
3) во всех точках c_m, $m = 0, 1, \dots, k-1$ существуют конечные обобщённая левая производная $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(c_m - t) - f(c_m - 0)}{-t}$ и обобщённая правая производная $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(c_m + t) - f(c_m + 0)}{t}$.



Упражнение. Сравните эти определения с определениями производной, левой и правой производных: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, $\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_+(x)$, $\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'_-(x)$.

Теорема 4 (о сходимости тригонометрического ряда Фурье). *Если 2π-периодическая и кусочно–дифференцируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ принадлежит классу $\overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$, то тригонометрический* *ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке x к значению*

$$s_0 = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Подставив в равенство (12) значение s_0 и выражение (7) для $\mathcal{D}_n(t)$, имеем

$$S_n - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \Big[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)\Big]\mathcal{D}_n(t)dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \Big[f(x+t)-f(x+0)\Big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \Big[f(x-t)-f(x-0)\Big]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt -$$

$$-\int\limits_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt + o(1) = I_1 - I_2 + o(1),$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}\,\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

Покажем, что $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$. В силу кусочной дифференцируемости функции $f(x)$ можно выбрать такое $\delta > 0$, чтобы функция $\varphi(t) = \dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ была непрерывна на $(0,\delta]$. Так как существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$, то точка $t=0$ не будет особой для $\varphi(t)$. Следовательно, эта функция интегрируема в собственном смысле. Точно так же в силу того, что $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = 1$, функция $\dfrac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$ интегрируема в собственном смысле на $[0,\delta]$. Тогда и произведение рассмотренных функций интегрируемо в собственном смысле на $[0,\delta]$, а значит, оно входит в класс $\overline{\mathcal{L}}_1[0,\delta]$. Таким образом, интеграл I_1 удовлетворяет всем условиям леммы Римана об осцилляции и получаем $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$.

Аналогично проводятся рассуждения для I_2.

Упражнение. Докажите, что $I_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, получаем $S_n - s_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = s_0$ и теорема доказана. ■

Пусть $x \in [-\pi,\pi]$. Рассмотрим $s_0 = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Если x — точка непрерывности функции f, то выполняется равенство односторонних пределов слева и справа $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, откуда $s_0 = f(x)$.

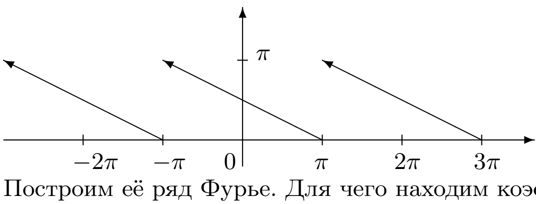
Следствие. *При выполнении условий теоремы 4 в каждой точке непрерывности x тригонометрический ряд сходится к значению функции в этой точке: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$.*

Замечание. Что даёт теорема 4 на концах отрезка, то есть в точках $x=\pi$ и $x=-\pi$? В точке $x=-\pi$ по теореме $s_0 = \dfrac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}$. Так как

$$f(-\pi-0) = \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi-0} f(x+2\pi) = \lim_{x\to\pi-0} f(x) = f(\pi-0),$$

то $s_0 = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$. Аналогично в точке $x=\pi$, используя теорему, имеем $s_0 = \dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, что позволяет не выходить из промежутка $[-\pi,\pi]$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$; для $x \in (-\pi,\pi]$ и 2π-периодически продолженную на всю числовую ось. Её график изображен ниже на чертеже.



Построим её ряд Фурье. Для чего находим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}dx = -\frac{(\pi-x)^2}{4\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi-x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0,$$

$\forall n = 1, 2, \ldots$, причем первый интеграл равен нулю в силу ортогональности на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $\cos nx$ единичной функции, второй интеграл — как интеграл от нечётной функции по симметричному промежутку.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx dx \right) = \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n}{n}, \ \forall \ n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, $\dfrac{\pi - x}{2} \sim \dfrac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \sin nx, \ x \in (-\pi, \pi]$.

Функция $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ кусочно–дифференцируема на $[-\pi, \pi]$ и непрерывна на $(-\pi, \pi)$. Тогда согласно теореме 4

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx, \ \text{если } x \in (-\pi, \pi).$$

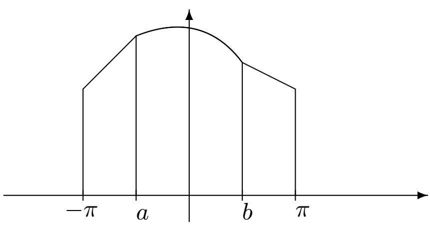
Другими словами, ряд Фурье сходится и сходится к самой функции $f(x)$, а на концах промежутка ряд будет сходиться к значению $\dfrac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Непериодические функции

Пусть функция $f(x)$ кусочно–дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[a, b]$. Возможны следующие три варианта.

1) $[a, b] = [-\pi, \pi]$. Если выполняется равенство $f(-\pi) = f(\pi)$, то функцию f можно 2π-периодически продолжить на всю числовую ось. Если равенство не выполняется, то 2π-периодического продолжения в этом случае не получится.

2) $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Продолжаем функцию $f(x)$ линейным образом на отрезок $[-\pi, \pi]$ так, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$. При этом сохранится кусочно–дифференцируемость и данный случай сведется к предыдущему случаю.



3) $[a,b] \supset [-\pi,\pi]$, т.е. $b-a > 2\pi$. В этой ситуации рассматривают функции с произвольным периодом (см. пункт 5).

3. Случай чётной и нечётной функций

Пусть $f(x)$ — чётная, 2π-периодическая функция и $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$. Построим для неё ряд Фурье, используя свойства интегралов по симметричному промежутку от чётной и нечётной функций:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{чётная}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{нечётная}}\,dx = 0.$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \;\text{ где } a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx. \tag{13}$$

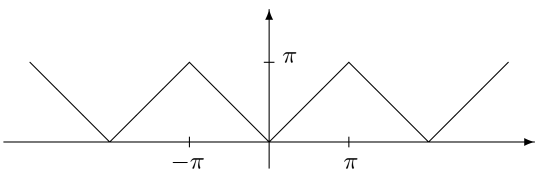
Пусть $f(x)$ — нечётная, 2π-периодическая функция и $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$. Построим для неё ряд Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{нечётная}}\,dx = 0, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{\text{чётная}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \;\text{ где } b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{14}$$

Разложения вида (13) называют разложением по косинусам, вида (14) — разложением по синусам.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$, при $x \in [-\pi,\pi]$. Она является чётной. Тогда $b_n = 0$. Так как $f(-\pi) = f(\pi)$, то возможно 2π-периодическое продолжение функции на всю числовую ось и, следовательно,согласно теореме 4 ряд Фурье сходится на $[-\pi,\pi]$, причем к самой функции $f(x)$.



Найдём коэффициенты $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x dx = -\frac{x^2}{\pi}\Big|_0^\pi = \pi$, и, используя интегрирование по частям: $u = x$, $du = dx$, $dv = \cos nx dx$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k, \\ \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}, \text{ если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Пусть $x = 0$. Подставим в разложение $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$. Откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Тогда

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{S} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}}_{\frac{S}{4}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}}_{\frac{\pi^2}{8}}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, то получаем $S = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}$, $\frac{3S}{4} = \frac{\pi^2}{8}$, $S = \frac{\pi^2}{6}$.
В итоге

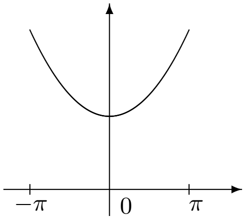
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

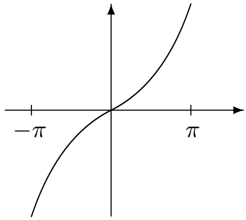
4. Случай полупериода

Пусть $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}_1[0, \pi]$. Если продолжить функцию $f(x), x \in [0, \pi]$ чётным образом на $[-\pi, \pi]$, то сохранится кусочно–дифференцируемость и $f(-\pi) = f(\pi)$. Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где } a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx dx.$$

Кроме того, к отрезку $[0, \pi]$ будет применима теорема 4.





Можно продолжить функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$ нечётным образом. Тогда будем иметь

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Кусочно–дифференцируемость функции в этом случае сохранится, но $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Тогда придется переопределить $f(x)$ либо в точке $x = -\pi$, либо в точке $x = \pi$ с тем, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$ и можно будет применить теорему 4 к отрезку $[0, \pi]$

Таким образом, функцию, заданную на полупериоде, можно разложить в ряд как по синусам, так и по косинусам.

5. Случай функции с произвольным периодом

Пусть $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\omega, \omega]$ — периодическая функция с периодом $T = 2\omega$. Построим для неё ряд Фурье. Для этого сделаем замену: $x = \dfrac{\omega}{\pi} t$, при которой из $x \in [-\omega, \omega]$ следует, что $t \in [-\pi, \pi]$. Обозначим $\varphi(t) \doteq f\left(\dfrac{\omega}{\pi} t\right)$. Тогда $\varphi(t) \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi, \pi]$ — периодическая функция с периодом $T = 2\pi$. Разложим $\varphi(t)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt.$$

Сделаем обратную замену $t = \dfrac{\pi}{\omega} x$, $dt = \dfrac{\pi}{\omega} dx$. Тогда коэффициенты Фурье для произвольного периода примут вид

$$a_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\omega} dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\omega} dx, \tag{15}$$

а разложение в ряд Фурье будет следующее:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\omega} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\omega}. \tag{16}$$

Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[a,b]$. Если $b - a > 2\pi$, то можно подобрать ω такое, что $[a,b] \subset [-\omega,\omega]$. Затем продолжить $f(x)$ с отрезка $[a,b]$ на отрезок $[-\omega,\omega]$ так, чтобы выполнялось равенство $f(-\omega) = f(\omega)$. А далее 2ω-периодически продолжить функцию на всю числовую прямую $\mathbb{R}$.

§8. Комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье

Пусть $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi,\pi]$ — периодическая функция с периодом $T = 2\pi$. Разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \;\; \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Подставим их в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{inx} + e^{-inx} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{inx} - e^{-inx} \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - b_n i) e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + b_n i) e^{-inx} \right].$$

Обозначив $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$; $c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n i)$; $c_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n i)$, получим

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Рассмотрим полученные коэффициенты при $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos nx - i \sin nx\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Формула остается верной и при замене n на $-n$ и при $n = 0$.

Таким образом, получена комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{17}$$

§9. Пространство $\overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$

1. Пространство со скалярным произведением

Определение 12. Пусть H — линейное пространство. Числовая функция (x, y), определенная для $\forall x, y \in H$, называется *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$,
5) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Если выполнены аксиомы 1)–4), то (x, y) называют *полускалярным произведением.*

Примеры

1. Одним из наиболее известных примеров пространства со скалярным произведением является рассмотренное ранее евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. В нем скалярное произведение для любых точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определяется по правилу

$$(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Скалярное произведение позволяет определить в пространстве H норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, которая в пространстве $\mathbb{R}^n$ принимает вид $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$. В линейной алгебре для пространства H со скалярным произведением доказывается неравенство $|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, называемое *неравенством Коши–Буняковского*. В пространстве $\mathbb{R}^n$ оно имеет вид

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \quad \text{или} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Последнее неравенство есть известное неравенство Коши.

2. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in \mathbb{R}^1$. Обозначим через l_2 множество всех точек x таких, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится. Введем в l_2 структуру линейного пространства. Определим для этого в l_2 две операции: сложение, заданное правилом $(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2$ и умножение на число $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots)$, где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ — некоторое число. Чтобы l_2 стало линейным пространством достаточно проверить, что указанные операции не выводят за пределы l_2, то есть требуется показать, что $(x + y) \in l_2$ и $\lambda x \in \ l_2$ или иначе, что ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda x_i)^2$ сходятся. Сходимость первого ряда вытекает из $(x_i+y_i)^2 = \left(x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2\right) \leqslant 2\left(x_i^2 + y_i^2\right)$, так как $2x_i y_i \leqslant \left(x_i^2 + y_i^2\right)$, которое следует из очевидного неравенства $(x_i - y_i)^2 \geqslant 0$. Сходимость второго ряда следует из очевидного равенства $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\lambda x_i)^2 = \lambda^2 \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ и того, что умножение сходящегося ряда на константу не влияет на его сходимость. Итак, показано, что l_2 — линейное пространство.

Скалярное произведение в пространстве l_2 определим по закону $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. Из неравенства $x_i y_i \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_i^2 + y_i^2\right)$ следует, что оно определено для $\forall x, y \in l_2$.

Упражнение. Проверьте, что выполнены аксиомы скалярного произведения.

Норма в l_2 определится соотношением

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2},$$

а неравенство Коши–Буняковского для последовательностей примет вид

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} \text{ или } \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2.$$

Ясно, что построенное пространство l_2 является ближайшим обобщением пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Пространство $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$

Рассмотрим множество функций f, заданных на отрезке $[a,b]$, и интегрируемых с квадратом, то есть таких, что интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx < +\infty$.

Операции сложения в этом множестве определим по обычному правилу $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, а умножение на число: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Покажем, что определенные таким образом функции будут из того же множества.

Так как $\int\limits_a^b f^2(x)dx < +\infty$, то $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ по свойствам определенного интеграла получим $\int\limits_a^b (\lambda f)^2\, dx = \lambda^2 \int\limits_a^b f^2 dx < +\infty$, что означает $\lambda f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$.

Докажем, что $\int\limits_a^b (f+g)^2\, dx < +\infty$. Заметим, что $|fg| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$.

Тогда $\int\limits_a^b |fg|\, dx \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\int\limits_a^b f^2 dx + \int\limits_a^b g^2 dx\right) < +\infty$ в силу $\int\limits_a^b f^2 dx < +\infty$, $\int\limits_a^b g^2 dx < +\infty$. Откуда $\int\limits_a^b (f+g)^2\, dx = \int\limits_a^b f^2 dx + 2\int\limits_a^b fg dx + \int\limits_a^b g^2 dx < +\infty$.

Таким образом, множество функций, интегрируемых с квадратом — линейное пространство. Нулевым элементом является функция $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

Введем скалярное произведение равенством $(f,g) = \int\limits_a^b fg dx$. Мы уже показали, что оно определено для любых двух функций, интегрируемых с квадратом. Проверим, что оно удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Пусть f, g, h — произвольные функции, интегрируемые с квадратом и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

1) $(f, g) = \int\limits_a^b fg dx = \int\limits_a^b gf dx = (g, f)$.

2) $(f + g, h) = \int\limits_a^b (f + g)h dx = \int\limits_a^b fh dx + \int\limits_a^b gh dx = (f, h) + (g, h)$.

3) $(\lambda f, g) = \int\limits_a^b \lambda fg dx = \lambda \int\limits_a^b fg dx = \lambda(f, g)$.

4) $(f, f) = \int\limits_a^b f^2 dx \geqslant 0$ $(a < b)$.

Видим, что первые четыре аксиомы выполнены. Что касается пятой аксиомы $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, то она не выполняется. Если $f = 0$, то $(f, f) = 0$. Однако обратное неверно. При $(f, f) = \int\limits_a^b f^2 dx = 0$ не обязательно $f = 0$. В самом деле, если взять $f(x) = 0$ при $x \neq a$ и $f(a) = 1$, то $\int\limits_a^b f^2 dx = 0$, а $f(x) \not\equiv 0$. Числовая функция (f, g), удовлетворяющая лишь первым четырем аксиомам, называется полускалярным произведением. В линейной алгебре для полускалярного произведения доказывается неравенство $|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)}$, которое называется неравенством Коши–Буняковского.

Чтобы исправить ситуацию с пятой аксиомой скалярного произведения, применим типичный в таких случаях прием, а именно, перейдем от множества функций, интегрируемых с квадратом, к его фактормножеству, или, как еще говорят, проведем процесс факторизации. Все функции f, для которых $\int\limits_a^b f^2 dx = 0$, будем по определению считать функциями эквивалентными нулю (пишем $f \sim 0$). Если $\int\limits_a^b (f - g)^2 dx = 0$, то есть если $f - g \sim 0$, то будем говорить, что функции f и g эквивалентны (пишем $f \sim g$). Все функции, интегрируемые с квадратом, распадаются данным бинарным отношением на классы эквивалентности.

Упражнение. Проверьте, что введенное бинарное отношение действительно является отношением эквивалентности, то есть проверьте справедливость аксиом отношения эквивалентности:
1) рефлексивность $f \sim f$;
2) симметричность $f \sim g \Rightarrow g \sim f$;
3) транзитивность $f \sim g$ и $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Рассмотрим теперь пространство, точкой в котором является класс эквивалентности $\overline{f} = \{f\}$. Тем самым, все функции одного и того же класса отождествляются. Заметим, что каждый класс эквивалентности не может включать в себя более одной непрерывной функции. В самом деле, если непрерывные функции f и g эквивалентны, то $f - g \sim 0$ или, иначе, $\int\limits_a^b (f-g)^2 dx = 0$. Но тогда $f(x) - g(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv g(x)$.

В этом фактор-множестве определим операции сложения и умножения на число по правилам $\overline{f} + \overline{g} = \overline{\{f+g\}}$ и $\lambda\overline{f} = \overline{\{\lambda f\}}$, где $f \in \overline{f}$ и $g \in \overline{g}$ — произвольно взятые функции классов $\overline{f}$ и $\overline{g}$, а λ — некоторое произвольное число.

Упражнение. Убедитесь в корректности введенных операций. Покажите для этого, что результат операций сложения классов и умножения на число не зависит от выбора представителей данных классов. Тем самым будет обоснована однозначность указанных операций.

Определим ещё в новом пространстве скалярное произведение двух классов $\overline{f}$ и $\overline{g}$ по правилу $\left(\overline{f}, \overline{g}\right) = (f, g) = \int\limits_a^b fg dx$. Опять возникает вопрос об однозначности указанной операции. Введём обозначение $\int\limits_a^b f^2 dx = \left\|f\right\|^2_{\mathcal{L}_2}$. Тогда неравенство Коши–Буняковского принимает следующую более краткую форму записи: $|(f,g)| \leqslant \left\|f\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2} \cdot \left\|g\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}$.

Пусть $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$. Это означает, что $\int\limits_a^b (f - f_1)^2 dx = \left\|f - f_1\right\|^2_{\mathcal{L}_2} = 0$ и $\int\limits_a^b (g - g_1)^2 dx = \left\|g - g_1\right\|^2_{\mathcal{L}_2} = 0$. Покажем, что $(f,g) = (f_1, g_1)$. Для доказательства рассмотрим

$$\left|\, (f,g) - (f_1, g_1) \,\right| = \left|\, (f, g - g_1) + (f - f_1, g_1) \,\right| \leqslant \left|\, (f, g - g_1) \right| + \left| (f - f_1, g_1) \,\right|.$$

Применив далее неравенство Коши–Буняковского в новых обозначениях, находим $\left|\,(f,g)-(f_1,g_1)\,\right| \leqslant \left\|f\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}\cdot\left\|g-g_1\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}+\left\|g_1\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}\cdot\left\|f-f_1\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}=0$. Откуда $(f,g)-(f_1,g_1)=0$ или $(f,g)=(f_1,g_1)$. Итак, скалярное произведение $\left(\overline{f},\overline{g}\right)$ не зависит от выбора взятых представителей.

Поскольку скалярное произведение классов эквивалентности сводится к скалярному произведению функций, интегрируемых с квадратом, то первые четыре аксиомы скалярного произведения будут автоматически выполнены. Но теперь справедлива и пятая аксиома, так как из условия $(\overline{f},\overline{f}) = \int\limits_a^b f^2dx = 0$ следует $f\sim 0$, то есть $\overline{f}=0$.

Наличие операции скалярного умножения позволяет стандартным образом определить в пространстве классов эквивалентности норму по закону $\left\|f\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2} = \sqrt{(\overline{f},\overline{f})} = \left(\int\limits_a^b f^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Так что введенное ранее формально обозначение $\left\|f\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2}$ было не случайным.

Таким образом, построенное фактор-множество, элементами которого служат классы эквивалентности, вместе с определенными в нем операциями сложения, умножения на число и скалярного умножения, становится линейным нормированным пространством, обозначаемым $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$.

Введённые нами пространства $\overline{\mathcal{L}}_1$ и $\overline{\mathcal{L}}_2$ не являются полными. Пополнение пространства $\overline{\mathcal{L}}_1$ приводит к пространству $\mathcal{L}_1$ функций, интегрируемых по Лебегу, которые будут изучаться в курсе теории функций действительного переменного.

Метрика пространства $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, как и метрика любого другого метрического пространства порождает определенный вид сходимости. Так, сходимость в пространстве $\mathbb{C}[a,b]$ есть равномерная сходимость, в пространстве $\mathbb{R}^n$ и l_2 — покоординатная сходимость. Сходимость в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ определяется условием $\|f_n-f\|^2 = \int\limits_a^b (f_n-f)^2\,dx \to 0$ при $n\to\infty$ и называется *сходимостью в среднем* по метрике данного пространства или ещё *среднеквадратической сходимостью.*

Разрешим вопрос о соотношении между равномерной сходимостью и сходимостью в среднем.

Теорема 5. *Если последовательность функций f_n равномерно сходится к функции f на $[a,b]$ при $n\to\infty$, то f_n к f сходится в среднем на $[a,b]$ при $n\to\infty$.*

Замечание. Другими словами, из равномерной сходимости следует среднеквадратическая сходимость.

Доказательство. Так как f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$ при

$n \to \infty$, то $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in [a,b]:\ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$.

Рассмотрим $\|f_n - f\|^2 = \int\limits_a^b (f_n - f)^2\, dx < \int\limits_a^b \left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)^2 dx = \dfrac{\varepsilon^2}{b-a}\int\limits_a^b dx =$
$= \varepsilon^2$. Тогда $\|f_n - f\|^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N:$ $\|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow f_n$ к f сходится в среднем на $[a,b]$ при $n \to \infty$. ■

Пример. Пусть $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$. Покажем, что последовательность функций f_n сходится в среднем к функции $f = 0$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$\int\limits_0^1 (x^n - 0)^2 dx = \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и означает, что x^n сходится в среднем к 0 на $[0,1]$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ Следовательно, последовательность $f_n(x) = x^n$ неравномерно сходится к функции $f(x) = 0$ на $[0,1]$ при $n \to \infty$.

Таким образом, пример показывает, что из сходимости в среднем не следует равномерная сходимость.

3. Ортогональность. Ряд Фурье в $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$

Определение 13. Две функции $f, g \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ называются *ортогональными* на отрезке $[a,b]$, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Определение 14. Система ненулевых функций $\{\varphi_k(x)\}$ (конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если ортогональны любые два элемента этой системы, то есть выполняется $(\varphi_i, \varphi_k) = \int\limits_a^b \varphi_i \varphi_k dx = 0$ при $i \neq k$ и $\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \int\limits_a^b \varphi_k^2 dx \neq 0$, $\forall k$.

Утверждение 1. *Ортогональная система является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — элементы ортогональной системы и $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n = 0$. Умножим это равенство скалярно на $\varphi_k(x)$: $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i, \varphi_k\right) = 0$; $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \underbrace{(\varphi_i, \varphi_k)}_{0 \text{ при } i \neq k} = 0 \Rightarrow \alpha_k \underbrace{(\varphi_k, \varphi_k)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$, $\forall k = 0, \dots, n$. Это и есть линейная независимость системы. ■

Функция $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$ называется *нормированной*, если $\left\|f\right\|_{\overline{\mathcal{L}}_2} = 1$.

Определение 15. Ортогональная система $\{\psi_k(x)\}$ (конечная или бесконечная),все элементы которой являются нормированными функциями, называется *ортонормированной системой.*

Данное определение означает, что $(\psi_k, \psi_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases}$

Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ — ортогональная система, причем $\varphi_k \neq 0,\ \forall k$ или, что тоже самое, $\|\varphi_k\| \neq 0$. Введем в рассмотрение функцию $\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}$ и вычислим

$$(\psi_k, \psi_i) = \left(\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right) = \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\|\varphi_k\| \cdot \|\varphi_i\|} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ \dfrac{(\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = 1, & k = i. \end{cases}$$

Откуда получаем, что $\{\psi_k(x)\}$ — ортонормированная система. Таким образом, любую ортогональную систему можно ортонормировать.

Пусть дана ортогональная, линейно независимая система

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}. \tag{18}$$

На базе этой системы можно строить ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\varphi_k$, где α_k — некоторые числа. Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\varphi_k(x) = f(x). \tag{19}$$

Предположим, что ряд (19) равномерно сходится на $[a, b]$ к f, и что функции $\varphi_k(x)$ непрерывны и ограничены при $\forall k$ на $[a, b]$. Умножив равенство (19) на $\varphi_n(x)$, мы не нарушим равномерную сходимость ряда, что позволяет его почленно на отрезке $[a, b]$ интегрировать. Это значит, что равенство (19) можно почленно скалярно умножить на φ_n. Тогда имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\varphi_k, \varphi_n\right) = (f, \varphi_n)\,;\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \underbrace{(\varphi_k, \varphi_n)}_{0 \text{ при } k \neq n} = (f, \varphi_n);\ \alpha_n \underbrace{(\varphi_n, \varphi_n)}_{\|\varphi_n\|^2} = (f, \varphi_n).$$

Откуда

$$\alpha_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{20}$$

Коэффициенты α_n, выраженные формулой (20), называются *коэффициентами Фурье*, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по системе (18), а частичные суммы этого ряда принято называть *суммами Фурье*.

Взяв далее произвольную функцию $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, видим, что формулы (20) имеют смысл, то есть что для функции f определены все её коэффициенты Фурье по ортогональной системе (18). Таким образом, для каждой функции $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ можно составить ряд Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$. Полученный ряд не обязан сходиться, а если и сходится, то он не обязан сходиться к самой функции f. Поэтому будем считать, что ряд Фурье соответствует функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x).$$

Пример. В качестве системы $\{\varphi_k(x)\}$ рассмотрим тригонометрическую систему $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\}$. Тогда

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{\|\cos nx\|^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{\|\sin nx\|^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{(f, 1)}{\|1\|^2} = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \; a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная система. Тогда коэффициенты Фурье находятся как $c_k = \dfrac{(f, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2} = (f, \psi_k)$. Разложение в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ можно записать в виде

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x), \text{ где } c_k = (f, \psi_k). \tag{21}$$

Рассмотрим ортогональную систему $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, где $\varphi_k(x) \neq 0$. Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. Тогда ей соответствует разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \text{ где } \alpha_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}.$$

Нормируем систему, полагая $\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}$. Тогда можно записать разложение в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}.$$

Сравнивая два разложения, получаем формулу связи коэффициентов Фурье по ортогональной и ортонормированной системам:

$$c_k = \alpha_k \|\varphi_k\|. \tag{22}$$

§10. Минимальное свойство сумм Фурье. Неравенство Бесселя

Пусть даны пространство $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ и $\{\varphi_k(x)\}$ — ортогональная система, по которой можно построить ортонормированную систему $\{\psi_k(x)\}$. Для функции $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ построим ряд Фурье по ортонормированной системе

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k, \text{ где } c_k = (f, \psi_k), \ \forall k.$$

Обозначим через $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \psi_k$ сумму Фурье; а через $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \psi_k$ произвольную линейную комбинацию функций $\{\psi_k\}_{k=0}^{n}$. Для $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ рассмотрим

$$\|f - t_n\|^2_{\mathcal{L}_2} = (f - t_n, f - t_n) = (f, f) - 2(f, t_n) + (t_n, t_n) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\left(f, \sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k, \sum_{j=0}^{n} a_j \psi_j\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{(f, \psi_k)}_{c_k} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k a_j \underbrace{(\psi_k, \psi_j)}_{=0 \text{ при } k \neq j} = \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} a_k c_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} c_k^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$

Таким образом, получаем

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (a_k - c_k)^2 .$$

Будем искать t_n, при котором выражение $\|f - t_n\|$ принимало бы минимальное значение: $\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum\limits_{k=0}^{n}(a_k - c_k)^2 \to \min$. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда $a_k = c_k$. Значит,

$$\min_{t_n} \|f - t_n\|^2 = \|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2, \tag{23}$$

Таким образом, получен полный ответ на поставленный вопрос: требуемый минимум всегда существует, известно, чему он равен, и известно, что он достигается для $t_n = S_n$, являющегося суммой Фурье n-го порядка по системе (18).

Определение 16. Числовая величина $E_n(f) = \min\limits_{t_n} \|f - t_n\|$ называется *наилучшим приближением* функции f суммами t_n.

Из соотношения (23) имеем $E_n(f) = \|f - S_n\|$ и $E_n^2(f) = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 \geqslant 0$.

Откуда следует неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2, \ \forall n. \tag{24}$$

Так как частичные суммы положительного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2$ ограничены, то он сходится. Поэтому, устремив в неравенстве (24) $n \to \infty$, получаем в пределе соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{25}$$

которое называют *неравенством Бесселя для ортонормированной системы*.

Аналогичные рассуждения можно провести для ортогональной системы. В силу формулы (22) имеем соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{26}$$

— *неравенство Бесселя для ортогональной системы.*

Рассмотрим на отрезке $[-\pi, \pi]$ тригонометрическую систему $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$. Тогда, вычисляя нормы функций, получим $\|1\|^2 = 2\pi$, $\|\cos nx\|^2 = \|\sin nx\|^2 = \pi$. Подставляя эти значения в неравенство Бесселя, имеем

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 \pi + b_k^2 \pi\right) \leqslant \|f\|^2$$

или

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \tag{26$'$}$$

— *неравенство Бесселя для тригонометрической системы.*

Если неравенство Бесселя переходит в равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{27}$$

то данное соотношение называется *равенством Парсеваля* или *уравнением замкнутости.* Равенство Парсеваля для тригонометрической системы

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \tag{27$'$}$$

называют *равенством Ляпунова.*

Равенство Парсеваля можно представить в виде $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 = \|f\|^2$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 - \|f\|^2\right) = 0$. Известно, что $E_n^2(f) = \|f - S_n\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 - \|f\|^2$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n\|^2 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$. Это означает, что S_n сходится в среднем к f при $n \to \infty$.

Вывод. Равенство Парсеваля (27) равносильно сходимости в среднем ряда Фурье к функции f на отрезке $[a, b]$.

§11. Замкнутые и полные ортогональные системы

Определение 17. Система элементов $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется *замкнутой в нормированном пространстве* H, если $\forall f \in H$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$ такая, что $\|f - t_n\|_H < \varepsilon$.

Пример. Пусть $\mathbb{C}[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций. Норма в данном пространстве определяется равенством $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Рассмотрим $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\right\}$ степенную систему функций. Тогда линейная комбинация $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ есть алгебраический многочлен. По первой теореме Вейерштрасса о равномерном приближении функций алгебраическими многочленами:

$$\forall f \in \mathbb{C}[a, b],\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k :\ \forall x \in [a, b],\ |f(x) - t_n(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ \max_{x \in [a,b]} |f(x) - t_n(x)| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ \|f - t_n\|_{\mathbb{C}} < \varepsilon.$$

Другими словами, степенная система является замкнутой в пространстве $\mathbb{C}[a, b]$.

Теорема 6 (критерий замкнутости ортогональной системы). *Для того чтобы $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ — ортогональная система была замкнутой в $\overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$ было выполнено равенство Парсеваля, то есть чтобы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$.*

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ — ортогональная, замкнутая система на $[a, b]$. Будем считать для простоты, что она ортонормированная (любую ортогональную систему из ненулевых элементов можно нормировать). Итак, $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ — ортонормированная, замкнутая, $\varphi_i \neq 0$, $\forall i$. Докажем, что для $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a, b] : \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$. По определению замкнутой системы $\forall f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi_k : \|f - t_n\| < \varepsilon$. Рассмотрим последовательность частичных сумм S_n. Так как $\|f - S_n\| = \min\limits_{t_n} \|f - t_n\|$, то имеем $\forall t_n : \|f - S_n\| \leqslant \|f - t_n\|$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\|f - S_N\| < \varepsilon$. С возрастанием n класс многочленов t_n расширяется, а при расширении класса минимум уменьшается. Следовательно, $\|f - S_n\|$ убывает. А значит, $\forall n \geqslant N$: $\|f - S_n\| \leqslant \|f - S_N\| < \varepsilon$. Таким образом, получаем $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$:

$\|f - S_n\|_{\mathcal{L}_2} < \varepsilon \Leftrightarrow S_n \to f$ сходится в среднем при $n \to \infty \ \Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (в силу вывода в конце предыдущего параграфа).

$\Leftarrow$) Покажем, что система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ замкнута в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. По условию для функции $f(x)$ выполнено равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=0}^{\infty} {c_k}^2 = \|f\|^2$. Как показано в предыдущем параграфе, это равнозначно утверждению: S_n сходится в среднем к f при $n \to \infty$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : \|f - S_N\|_{\overline{\mathcal{L}}_2} < \varepsilon$ и требуемый многочлен t_n нашелся. Это и означает замкнутость системы $\{\varphi_i\}$ в $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. ■

Замечание. В силу того что равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ гарантирует нам замкнутость системы, его ещё называют *уравнением замкнутости.*

Поскольку выполнимость равенства Парсеваля гарантирует сходимость в среднем ряда Фурье функции $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ к самой этой функции, то теорема 6 показывает: если ортогональная система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ замкнута в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, то ряд Фурье по системе $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ каждой функции $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ сходится к f по метрике данного пространства $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ (другими словами, сходится в среднем).

В замкнутой ортонормированной системе равенство Парсеваля допускает существенное обобщение. Рассмотрим $\{\psi_k\}$ — ортонормированную, замкнутую систему в $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. Возьмем $\forall\ f, g \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. Тогда $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k$, где $a_k = (f, \psi_k)$, $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\psi_k$, где $b_k = (g, \psi_k)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2 = \|g\|^2$.

Теорема 7. *Если $\{\psi_k\}$ — замкнутая ортонормированная система, то для $\forall f, g \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$:*

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k, \ \text{где } a_k = (f, \psi_k), \ b_k = (g, \psi_k). \tag{28}$$

Доказательство. В силу замкнутости системы $\{\psi_k\}$ для функций $f, g, f+g \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ имеют место равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$, где $a_k = (f, \psi_k)$, $\|g\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2$, где $b_k = (g, \psi_k)$, и $\|f+g\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2$, где

$c_k = (f+g, \psi_k) = (f, \psi_k) + (g, \psi_k) = a_k + b_k$. Последнее равенство можно записать следующим образом $(f+g, f+g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)^2$ или

$$(f,f) + 2(f,g) + (g,g) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k^2 + 2a_kb_k + b_k^2\right);$$

$$\|f\|^2 + 2(f,g) + \|g\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_kb_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2.$$

Откуда получаем требуемое соотношение $(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kb_k$. ■

Очевидно, что при $g = f$ соотношение (28) превращается в равенство Парсеваля.

Рассмотрим одно из приложений теоремы 7. Пусть $\{\psi_k\}$ — некоторая замкнутая ортонормированная система, $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, пусть при $a < x_0 < b$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & a \leqslant x \leqslant x_0, \\ 0, & x_0 < x \leqslant b. \end{cases}$$

Пусть $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k$, где $a_k = (f, \psi_k)$, разложение функции f в ряд Фурье. По теореме 7 скалярное произведение представимо $(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_kb_k$, где $b_k = (g, \psi_k) = \int\limits_a^{x_0} \psi_k dx$. Так что $(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_a^{x_0} \psi_k dx$. С другой стороны, согласно определению $(f,g) = \int\limits_a^{x_0} f dx$. Сравнивая оба выражения для (f,g), получаем

$$\int_a^{x_0} f dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^{x_0} \psi_k dx. \tag{29}$$

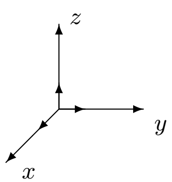
Равенство (29) означает, что ряд Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k \sim f$ можно почленно интегрировать на $[a, x_0]$, хотя он не обязан даже сходиться на $[a,b]$. Здесь нет противоречия с указанным выше соотношением $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k$, так как последнее равенство утверждает лишь, что последовательность S_n сходится в среднем к функции f, то есть $\|f - S_n\|_{\overline{\mathcal{L}}_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 18. Ортогональная система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется *полной* в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, если не существует ненулевого элемента $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ ортогонального ко всем элементам системы.

Теорема 8 (признак полноты системы). *Если $\{\varphi_k\}$ — замкнутая ортогональная система в $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, то она является полной.*

Доказательство. Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]: \ f \perp \varphi_k \ \forall k$, т.е. $(f,\varphi_k) = 0, \ \forall k$. В силу критерия замкнутости ортогональной системы (теорема 6) для функции f должно быть выполнено равенство Парсеваля: $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$, где $c_k = (f,\varphi_k) = 0, \ \forall k$. Тогда $\|f\|^2 = 0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$. Мы получили, что элемент, ортогональный любому элементу системы, является нулевым. Значит, по определению 18 система будет полной. ■

Результаты данного параграфа имеют довольно простую и прозрачную геометрическую интерпретацию, которая устанавливает достаточно широкую аналогию между пространством $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ и пространствами $\mathbb{R}^n$ и l_2. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — замкнутая в $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ ортонормированная система и $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$. Тогда имеет место представление $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k$, где a_k — коэффициенты Фурье функции f по данной системе. Указанное представление позволяет интерпретировать систему $\{\psi_k\}$ как ортонормированный базис в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$, так как каждый вектор $f \in \overline{\mathcal{L}}_2[a,b]$ раскладывается по нему, а коэффициенты Фурье a_k являются координатами вектора f в этом базисе. Соотношение $(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ можно рассматривать как выражение скалярного произведения векторов f и g через их координаты в ортогональном базисе, а равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ можно считать аналогом теоремы Пифагора. Отметим, что система $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ полная, и дополним указанную аналогию ещё одним примером.



В трехмерном геометрическом пространстве $\mathbb{R}^3$ никакие два ортогональных вектора не могут составить базис пространства. Это означает, что система из двух ортогональных векторов не является полной. А вот любая система из трёх взаимно ортогональных векторов уже будет базисом, и следовательно, она является полной в пространстве $\mathbb{R}^3$.

§12. Теорема Фейера. Полнота и замкнутость тригонометрической системы

Обозначим через $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\Big[S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)\Big]$, где

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos jx + b_j \sin jx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathcal{D}_k(t)dt \qquad (30)$$

— частичные суммы тригонометрического ряда Фурье, определяемые с помощью ядра Дирихле $\mathcal{D}_k(t) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{j=1}^{k} \cos jt$, чётного тригонометрического многочлена (см. §6). Функция $\sigma_n(x)$ называется *суммой Фейера.* Преобразуем её с помощью формул (30)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathcal{D}_k(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\mathcal{D}_k(t)}_{\mathcal{F}_n(t)}\,dt.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\mathcal{F}_n(t)dt, \qquad (31)$$

где функция

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(t) \qquad (32)$$

называется *ядром Фейера.*

Свойства ядра Фейера

1. $\mathcal{F}_n(t)$ — чётный тригонометрический многочлен порядка n.

В силу чётности $\mathcal{D}_k(t)$ следует из определения $\mathcal{F}_n(t)$.

2. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_n(t)dt = 1.$

Доказательство. В силу $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_k(t)dt = 1$ при $\forall k = 0, 1, \ldots, n$ (см. §6)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{D}_k(t)dt = 1. \qquad \blacksquare$$

3. $\mathcal{F}_n(t) \geqslant 0$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 4: $\mathcal{F}_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathcal{D}_k(t) =$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin(k+\frac{1}{2})t\sin\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kt - \cos(k+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1-\cos(n+1)t}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \geqslant 0.$$

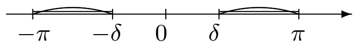
Попутно получили формулу для ядра Фейера

$$\mathcal{F}_n(t) = \frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},\ t \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (33)$$

$\blacksquare$

4. Пусть $0 < \delta < \pi$ *— произвольное. Тогда* $\mathcal{F}_n(t)$ *равномерно сходится к* 0 *на множестве* $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство.



Заметим, что множество $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ ограничено и замкнуто. Воспользовавшись равенством (33) и неравенством $\left|\sin\dfrac{t}{2}\right| \geqslant \left|\sin\dfrac{\delta}{2}\right|$, имеем $\mathcal{F}_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}$ при всех t, удовлетворяющих неравенству $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$. Так как функция $\mathcal{F}_n(t)$ непрерывна на компактном множестве $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$, то она достигает на этом множестве наибольшего значения, для которого в силу предыдущей оценки справедливо неравенство $0 \leqslant \max\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t) \leqslant \dfrac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}$. Так как правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, то отсюда следует, что $\max\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда на основании супремного критерия равномерной сходимости последовательность $\mathcal{F}_n(t)$ равномерно сходится к 0 на множестве $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ при $n \to \infty$. $\blacksquare$

Теорема 9 (Фейера). *Если f — непрерывная, 2π-периодическая функция, то последовательность $\sigma_n(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Умножив обе части равенства $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(t)dt = 1$ на $f(x)$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathcal{F}_n(t)dt.$$

Тогда на основании представления (31) для $\sigma_n(x)$ имеем

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t) - f(x)\right]\mathcal{F}_n(t)dt.$$

Пусть $x \in [-\pi,\pi]$; в силу определения интеграла $t \in [-\pi,\pi]$. Из того, что $x+t \in [-2\pi,2\pi]$ и f непрерывна на компакте $[-2\pi,2\pi]$, вытекает равномерная непрерывность функции f на $[-2\pi,2\pi]$. Это означает, что $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall x,\ \forall t\ :\ |t| < \delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Разобьем интеграл на два интеграла: $\sigma_n(x) - f(x) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<\delta}\left[f(x+t) - f(x)\right]\mathcal{F}_n(t)dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\left[f(x+t) - f(x)\right]\mathcal{F}_n(t)dt}_{I_2}.$$

Тогда $|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant |I_1| + |I_2|$. Оценим сначала первый интеграл.

$$|I_1| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left[f(x+t) - f(x)\right]\mathcal{F}_n(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\mathcal{F}_n(t)dt <$$

$$< \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\mathcal{F}_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{F}_n(t)dt}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, так как $f \in \mathbb{C}[-2\pi,2\pi]$, то функция f ограничена, и, следовательно, $\exists M > 0,\ \forall x \in [-2\pi,2\pi]\ :\ |f(x)| \leqslant M$. Значит, $|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2M$. Тогда

$$|I_2| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\left[f(x+t) - f(x)\right]\mathcal{F}_n(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|f(x+t)-f(x)|\,\mathcal{F}_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\max_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t)\underbrace{\int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}1dt}_{\leqslant 2\pi} \leqslant 4M\max_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t).$$

Поскольку свойство *4* ядра Фейера утверждает, что $\max\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\mathcal{F}_n(t)\to 0$ при $n\to\infty$, то интеграл $|I_2|\to 0$ при $n\to\infty$. Значит, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, $\forall x\in[-\pi,\pi]:|I_2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Откуда $|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant|I_1|+|I_2|<\varepsilon$, $\forall n\geqslant N$ и $\forall x\in[-\pi,\pi]$, то есть последовательность $\sigma_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[-\pi,\pi]$. ■

Замечание. Если $f\in\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то функцию можно 2π-периодически продолжить на всю числовую прямую, сохранив при этом непрерывность. Так что теорема Фейера остается справедливой и в данном случае. Класс таких непрерывных 2π-периодических функций обозначают $\mathbb{C}(-\infty,\infty)=\mathbb{C}_{2\pi}$.

Из теоремы Фейера немедленно вытекает следующее важнейшее предложение.

Теорема 10 (Вторая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении функции тригонометрическими многочленами). *Если $f(x)$ непрерывная, 2π-периодическая функция, то $\forall\varepsilon>0$ найдется такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $\forall x$ справедливо неравенство $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$.*

Доказательство. Действительно, поскольку $\sigma_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на всей числовой прямой, то требуемый тригонометрический многочлен $T_n(x)$ найдётся среди многочленов $\sigma_n(x)$. ■

В силу сделанного выше замечания будет справедливо и следующее утверждение: *если $f\in\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то для $\forall\varepsilon>0$ можно указать такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $\forall x\in[-\pi,\pi]$ выполнено неравенство $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$.*

Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из второй теоремы Вейерштрасса. Поскольку утверждение $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$, $\forall x$ равносильно неравенству $\max\limits_{x}|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$, то второй теореме Вейерштрасса можно придать следующую эквивалентную форму: *если функция $f\in\mathbb{C}_{2\pi}$, то $\forall\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $\|f(x)-T_n(x)\|_{\mathbb{C}_{2\pi}}<\varepsilon$.*

Точно так же: *если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и принимает на его концах равные значения, то $\forall\varepsilon>0$ найдётся такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $\|f(x)-T_n(x)\|_{\mathbb{C}[-\pi,\pi]}<\varepsilon$.*

Так как тригонометрический многочлен есть линейная комбинация некоторой конечной части тригонометрической системы $\{1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$, то указанные выше утверждения означают, что тригонометрическая система является замкнутой в первом случае в пространстве $\mathbb{C}_{2\pi}$, а во втором — во множестве функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$, для которых $f(-\pi) = f(\pi)$, в смысле *равномерной метрики.* Напомним, что равномерной называется метрика пространства $\mathbb{C}[a, b]$.

Легко видеть, что $\|f(x) - T_n(x)\|_{\overline{\mathcal{L}}_2[-\pi,\pi]} \leqslant \sqrt{2\pi}\, \|f(x) - T_n(x)\|_{\mathbb{C}[-\pi,\pi]}$. Поэтому в приведенной выше формулировке второй теоремы Вейерштрасса норму $\|f(x) - T_n(x)\|_{\mathbb{C}[-\pi,\pi]}$ можно заменить на $\|f(x) - T_n(x)\|_{\overline{\mathcal{L}}_2[-\pi,\pi]}$, которую для удобства будем называть *среднеквадратической нормой.* Тогда тригонометрическая система оказывается замкнутой системой во множестве функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ с равными значениями на его концах, и в смысле среднеквадратической метрики. В силу критерия замкнутости ортогональной системы для функций этого множества будет выполняться равенство Парсеваля, принимающее в данном случае следующий вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2 dt,$$

где a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе. Из замкнутости следует полнота тригонометрической системы во множестве функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ с равными значениями на его концах (см. теорему 8).

Замечание. Можно доказать, что тригонометрическая система является замкнутой и во всём пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[-\pi, \pi] = \overline{\mathcal{L}}_2$, но это доказательство требует дополнительных рассмотрений и достаточно громоздко. Поэтому в данном пособии мы его не приводим.

Рассмотрим ещё два приложения критерия замкнутости ортогональной системы.

Теорема 11 (единственности). *Если ряды Фурье двух функций f и $g \in \overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$ по замкнутой ортонормированной системе совпадают, то $f(x) = g(x)$ на отрезке $[a, b]$ в смысле метрики пространства $\overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$, т.е. $\|f - g\|_{\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]} = 0$ или $f \sim g$.*

Доказательство. Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — замкнутая ортонормированная система в пространстве $\overline{\mathcal{L}}_2[a, b]$, a_k и b_k — коэффициенты Фурье по данной системе соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$. По условию $a_k = b_k$, $\forall k$. Тогда у функции $f - g$ все её коэффициенты Фурье $c_k = a_k - b_k = 0$. Это означает, что функция $f - g$ ортогональна ко всем элементам системы $\{\psi_k\}$. Отсюда в силу полноты системы $f - g = 0$ или $f = g$. ■

Теорема 12. *Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — замкнутая ортонормированная си-*

стема непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Если ряд Фурье непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, то его сумма равна $f(x)$.

Доказательство. Пусть $g(x)$ — сумма ряда Фурье функции $f(x)$. В силу равномерной сходимости ряда функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поскольку последовательность S_n равномерно сходится к g на $[a, b]$, то она сходится и в среднем к функции g. С другой стороны, так как система $\{\psi_k\}$ замкнутая, то последовательность S_n сходится в среднем к функции f. Но в метрическом пространстве предел обязан быть единственным. Поэтому $\|f - g\|_{\overline{\mathcal{L}}_2[a,b]} = 0$, что в силу непрерывности функций f и g означает, что $g(x) \equiv f(x)$ при $\forall x \in [a, b]$. ∎

Подводя итог, ещё раз подчеркнем: если (составленный формально) ряд Фурье функции $f(x)$ окажется равномерно сходящимся на отрезке $[a, b]$, то его сумма равна $f(x)$.

§13. Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье

Хорошо известно, какую важную роль в теории рядов играет понятие равномерной сходимости. В конце предыдущего параграфа мы видели, насколько плодотворным может быть это понятие и для рядов Фурье.

Пусть функция $f \in \overline{\mathcal{L}}_1[-\pi, \pi]$ и $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — её тригонометрический ряд Фурье. Легко получить довольно элементарный и достаточно грубый признак равномерной сходимости данного ряда.

Теорема 13. *Если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big[|a_k| + |b_k|\Big]$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$.*

Доказательство. Равномерная сходимость ряда Фурье на основании признака равномерной сходимости Вейерштрасса вытекает из очевидного неравенства $\big|a_k \cos kx + b_k \sin kx\big| \leqslant |a_k| + |b_k|$. А то, что суммой ряда является функция $f(x)$, доказано в теореме 12. ∎

Рассмотрим один важный случай, в котором просто проверяются условия, обеспечивающие сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big[|a_k| + |b_k|\Big]$.

Теорема 14. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную, то её ряд Фурье равномерно сходится на всей числовой прямой к функции $f(x)$.*

Доказательство. Очевидно, можно ограничиться промежутком $[-\pi, \pi]$. Также в силу периодичности имеем $f(-\pi) = f(\pi)$.

Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ — точки разрыва производной $f'(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Сначала оценим коэффициенты Фурье a_n. Разбив интеграл на сумму интегралов, мы обеспечиваем возможность проинтегрировать по частям. В результате находим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x) \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{1}{n} f(x) \sin nx \Big|_{c_k}^{c_{k+1}} - \frac{1}{n} \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f'(x) \sin nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{m} \Big[f(c_{k+1}) \sin nc_{k+1} - f(c_k) \sin nc_k \Big] - \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f'(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \Big[f(c_1) \sin nc_1 - f(-\pi) \sin(-n\pi) + \cdots + f(\pi) \sin(n\pi) - f(c_m) \sin nc_m \Big] -$$

$$- \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{b'_n}{n},$$

где $b'_n = b_n(f')$ — коэффициент Фурье при $\sin nx$ функции $f'(x)$, и для симметрии обозначений считается $-\pi = c_0$, $\pi = c_{m+1}$. Аналогично выводим, что $b_n = \dfrac{a'_n}{n}$, где $a'_n = a_n(f')$ — коэффициент Фурье при $\cos nx$ той же функции $f'(x)$. Тогда имеем

$$\Big| a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big| \leqslant |a_n| + |b_n| = \frac{|b'_n|}{n} + \frac{|a'_n|}{n}.$$

Применив далее известное неравенство $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$, получаем

$$\frac{|a'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \left(a'^2_n + \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{|b'_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \left(b'^2_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

В итоге можно писать, что $\Big| a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big| \leqslant \dfrac{1}{2} \left(a'^2_n + b'^2_n \right) + \dfrac{1}{n^2}$. Так как ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a'^2_n + b'^2_n \right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходятся, то по признаку Вейерштрасса ряд Фурье равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$. В силу теоремы 12 суммой этого ряда является сама функция $f(x)$. ■

Замечание. Отметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ в данной теореме обязательно, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная.

Как это уже не раз показывалось, теоремы 12 и 13 будут справедливы и для функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$ с равными значениями на его концах.

§14. Примеры и дополнения

1. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} ax \text{ при } x \in [0, \pi], \\ bx \text{ при } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

где a и b — постоянные.

Данная функция непрерывная и имеет кусочно непрерывную производную $f'(x) = \begin{cases} a \text{ при } x \in (0, \pi], \\ b \text{ при } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$ Найдём её коэффициенты Фурье. Имеем $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} bxdx + \int\limits_{0}^{\pi} axdx\right] = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{bx^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \dfrac{ax^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \dfrac{(a-b)\pi}{2}$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} bx\cos kxdx + \int\limits_{0}^{\pi} ax\cos kxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int\limits_{0}^{\pi} bx\cos kxdx + \int\limits_{0}^{\pi} ax\cos kxdx\right] = \frac{a-b}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos kxdx =$$

$$= \frac{a-b}{k\pi}\left[x\sin kx\Big|_{0}^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi} \sin kxdx\right] = \frac{a-b}{k^2\pi}\cos kx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{a-b}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2m, \\ \dfrac{2(b-a)}{(2m-1)^2\pi} \text{ при } k = 2m-1. \end{cases}$$

Аналогично $b_k = \dfrac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} bx\sin kxdx + \int\limits_{0}^{\pi} ax\sin kxdx\right] =$

$$= \frac{a+b}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin kxdx == \frac{a+b}{k\pi}\left[-x\cos kx\Big|_{0}^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi} \cos kxdx\right] =$$

$$= \frac{a+b}{k\pi}\left[-\pi\cos k\pi + \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi}\right] = (-1)^{k+1}\frac{a+b}{k}.$$

На основании теоремы 4 делаем вывод, что при $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = \frac{(a-b)\pi}{4} - \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + (a+b)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}. \quad (34)$$

На концах отрезка $\pm\pi$ сумма ряда равна $\dfrac{(a-b)\pi}{2}$.

Если взять $a = b = 1$, то $f(x) = x$ и равенство (34) даёт нам

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k} \quad \text{при} \ -\pi < x < \pi. \quad (35)$$

На концах интервала сумма ряда равна 0 (что получается и непосредственной подстановкой в ряд значений $x = \pm\pi$). Следовательно, в этих точках соотношение (35) не выполняется.

В случае $a = -b = 1$ имеем $f(x) = |x|$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, а также

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \ x \in [-\pi, \pi]. \quad (36)$$

Заметим, что представление (36) было уже получено ранее непосредственно (см. § 7.3).

Тригонометрические ряды Фурье служат удобным аппаратом для вычисления сумм числовых рядов. Так, если взять $x = \dfrac{\pi}{2}$ в равенстве (35), то получим сумму известного ряда Лейбница $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

Полагая в (35) $x = \pi - y$, где $y \in (0, 2\pi)$, находим

$$\frac{\pi - y}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin(k\pi - ky)}{k} \quad \text{или} \quad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}, \ 0 < x < 2\pi.$$

2. Пусть $f(x) = x^2$ на $[-\pi, \pi]$. Требуется разложить её в ряд Фурье. Легко видеть, что данная функция четная и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому она удовлетворяет условиям теоремы 4. Строим ряд Фурье функции $f(x)$. Имеем $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 dx = \dfrac{2}{3}\pi^2$;

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx dx = \frac{2}{k\pi}\left(x^2\sin kx\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin kx dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{k\pi}\int\limits_0^\pi x\sin kx dx = -\frac{4}{k^2\pi}\left(-x\cos kx\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \cos kx dx\right) = (-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

Отсюда $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{\cos kx}{k^2}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Полагая в данном равенстве $x = 0$ и $x = \pi$, находим соответственно

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0, l]$.

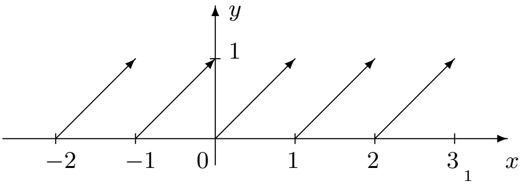
Так как решение данного задания требует четного продолжения функции на отрезок $[-l, 0]$, которым является функция $f(x) = |x|$, то задание можно переформулировать так: разложить функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-l, l]$ в тригонометрический ряд Фурье. Следовательно, в силу формул (15), находим $a_0 = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l x dx = l$; $b_k = 0$;

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\left[\frac{l}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \frac{l}{k\pi}\int\limits_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx\right] =$$

$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{2l}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2m, \\ -\dfrac{4l}{(2m-1)^2\pi^2} \text{ при } k = 2m-1. \end{cases}$$

Поскольку функция $f(x) = |x|$ непрерывна и кусочно–дифференцируема на отрезке $[-l, l]$ и, кроме того, $f(-l) = f(l)$, то по теореме 4 в силу (16) имеем $|x| = \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\cos\dfrac{(2m-1)\pi x}{l}$, $x \in [-l, l]$ или $x = \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\cos\dfrac{(2m-1)\pi x}{l}$, $x \in [0, l]$.

4. Рассмотрим функцию $f(x) = \{x\} = x - [x]$, где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x, $[x]$ — целую часть числа x. Данная функция периодическая с периодом $2\omega = 1$ и имеет разрывы первого рода в точках $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. график функции на чертеже).



Согласно формулам (15) получаем $a_0 = 2\int\limits_0^1 xdx = l;$

$$a_k = 2\int\limits_0^1 x\cos 2k\pi x dx = 2\left[\frac{1}{2k\pi} x\sin 2k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^1 \sin 2k\pi x dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\int\limits_0^1 \sin 2k\pi x dx = \frac{1}{2k^2\pi^2}\cos 2k\pi x\Big|_0^1 = 0;$$

$$b_k = 2\int\limits_0^1 x\sin 2k\pi x dx = 2\left[\frac{1}{2k\pi} x\cos 2k\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^1 \cos 2k\pi x dx\right] = -\frac{1}{k\pi}.$$

Снова на основании теоремы 4 в силу разложения (16) заключаем

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi x}{m},\ x \neq k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

В точках $x = k,\ k \in \mathbb{Z}$ сумма ряда равна $\dfrac{1}{2}$.

5. Пусть a — нецелое число. Разложим функцию $f(x) = \cos ax$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0, \pi]$. Имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos ax dx = \frac{2\sin\pi a}{\pi a};\ a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos ax\cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\big[\cos(a-k)x - \cos(a+k)x\big]dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-k)\pi}{a-k} + \frac{\sin(a+k)\pi}{a+k}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi}\left(\frac{\sin\pi a}{a-k} + \frac{\sin\pi a}{a+k}\right) = (-1)^k\frac{2a\sin\pi a}{\pi(a^2-k^2)}.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то в силу теоремы 4 можем писать

$$\cos ax = \frac{\sin\pi a}{\pi a} + \frac{2a\sin\pi a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{a^2-k^2},\ x \in [-\pi, \pi]. \qquad (37)$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0$ и $\pi a = z$, находим

$$1 = \frac{\sin z}{z} + \frac{2a \sin z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2}.$$

Предполагая далее $z \neq k\pi$, делим полученное соотношение на $\sin z$. Тогда получаем $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{2z}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\left(\frac{z}{\pi}\right)^2 - k^2} =$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) \text{ или}$$

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z - k\pi}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь сумма ряда $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ понимается как $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n}$.

В итоге получено разложение дроби $\dfrac{1}{\sin z}$ в бесконечный ряд простых дробей по корням знаменателя. Напрашивается сравнение с разложением правильной рациональной дроби на простые дроби.

Рассмотрим ещё одно приложение представления (37). Если взять в соотношении (37) $x = \pi$, то оно примет вид

$$\cos \pi a = \frac{\sin \pi a}{\pi a} + \frac{2a \sin \pi a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2}.$$

Откуда при $\pi a \neq k\pi$ будем иметь $\operatorname{ctg} \pi a = \dfrac{1}{\pi a} + \dfrac{2a}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^2 - k^2}$. Обозначим $\pi a = x \neq k\pi$. Тогда получаем, что $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - k^2}$ или

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - (k\pi)^2}, \; x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}. \tag{38}$$

Данная формула даёт разложение функции $\operatorname{ctg} x$ по корням $\sin x$.

Рассмотрим теперь произвольный отрезок $[-q, q]$, где $q \neq k\pi$; пусть $n\pi < q < (n+1)\pi$. Очевидно, что особые точки функции $\operatorname{ctg} x$ — это $x = k\pi$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$, находятся на отрезке $[-q, q]$, а все остальные особые точки лежат вне этого отрезка. Чтобы погасить действие особых точек $\operatorname{ctg} x$ на $[-q, q]$, представим соотношение (38) в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - (k\pi)^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - (k\pi)^2}. \tag{38$'$}$$

Нетрудно убедиться, что точки $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n$ являются для левой части указанного равенства точками устранимого разрыва. Для обоснования данного вывода достаточно вычислить указанные ниже пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = 0,$$

$$\lim_{x\to k\pi}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x - k\pi}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right) = 0.$$

Таким образом, левая часть в (38$'$) становится интегрируемой (в собственном смысле) на $[0, x]$ при $\forall x \in [-q, q]$. Все слагаемые правой части — непрерывные функции на $[-q, q]$, а ряд, составленный из них, равномерно сходится на $[-q, q]$, так как при $|x| \leqslant q$ члены $\left|\dfrac{2x}{(k\pi)^2 - x^2}\right|$ в силу возрастания этих функций не превосходят членов сходящегося ряда $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2q}{(k\pi)^2 - q^2}$.

Интегрируя от 0 до x, получим в левой части

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right) dt - \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \frac{2tdt}{t^2 - (k\pi)^2} = \ln\left|\frac{\sin t}{t}\right|\Bigg|_0^x - \sum_{k=1}^{n}\ln\left|t^2 - (k\pi)^2\right|\Bigg|_0^x =$$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{x}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left|x^2 - (k\pi)^2\right| - \ln(k\pi)^2\right] = \ln\left|\frac{\sin x}{x}\right| - \sum_{k=1}^{n}\ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}\right|.$$

Интегрируя почленно правую часть равенства (38$'$), находим

$$\int_0^x \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2t}{t^2 - (k\pi)^2}\right) dt = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_0^x \frac{2tdt}{t^2 - (k\pi)^2} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left|t^2 - (k\pi)^2\right| \Big|_0^x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right|.$$

В итоге имеем $\ln\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left|1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \ln\left|1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right|$ или

$$\ln\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right| = \ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Значит, $\ln\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \ln\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ и $|\sin x| = \left|x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right|$.

Несложно проследить по числу отрицательных множителей, что знаки обоих выражений, стоящих под знаком модуля, совпадают. Отсюда делаем окончательный вывод:

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \ \forall x. \tag{39}$$

Полученное представление $\sin x$ в виде бесконечного произведения напоминает представление алгебраического многочлена в виде произведения конечного числа линейных множителей по корням многочлена.

Замечание. В примере **5** мы столкнулись с бесконечным произведением. Попробуем хоть сколько-нибудь разобраться с этим понятием. Имеется достаточно глубокая аналогия между бесконечным рядом и бесконечным произведением. Принципиальная разница между ними, прежде всего, заключается в том, что в бесконечном произведении знак сложения заменен знаком умножения. Кроме того, для бесконечных произведений нет специального термина, соответствующего термину сумма ряда. Будем называть его значением бесконечного произведения и определять как $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} b_k$, где $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k = b_1 b_2 \cdots b_n$. Поэтому в силу непрерывности логарифмической функции имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln b_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \ln b_k = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} b_k\right) = \ln\prod_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Тем самым правило — сумма логарифмов равна логарифму произведения, — известное из курса школьной математики для конечного числа слагаемых, остаётся справедливым и для ряда. Чтобы можно было свести бесконечное произведение к ряду, надо иметь возможность рассматривать $\ln b_k$.

Тогда приходится требовать, чтобы все множители бесконечного произведения были положительными. Кроме того, следует учитывать и случай, когда сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln b_k = -\infty$, так как тогда значение бесконечного произведения равно нулю. В таком случае бесконечное произведение должно считаться расходящимся. Исходя из вышесказанного естественно приходим к определению: бесконечное произведение называется *сходящимся*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$ существует, конечен и не равен нулю; в противном случае оно называется *расходящимся*.

6. Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция f удовлетворяет условию:
а) $f(x+\pi) = f(x)$, то $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0,\ n \in \mathbb{N}$;
б) $f(x+\pi) = -f(x)$, то $a_0 = 0,\ a_{2n} = b_{2n} = 0,\ n \in \mathbb{N}$.

В обоих случаях функция f — 2π-периодическая и имеет разложение в ряд Фурье: $f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, где a_n и b_n — коэффициенты Фурье. Тогда получаем

а) $a_{2n-1} = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2n-1)xdx = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2n-1)xdx$.

Сделав замену $x+\pi = t$, имеем $a_{2n-1} = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\cos\left[(2n-1)(t-\pi)\right]dt =$
$= -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\cos(2n-1)tdt = -a_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Итак, $a_{2n-1} = -a_{2n-1}$. Отсюда вытекает, что $a_{2n-1} = 0$. Аналогично $b_{2n-1} = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n-1)xdx =$
$= \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\sin(2n-1)xdx = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\sin\left[(2n-1)(t-\pi)\right]dt = -b_{2n-1}$
и $b_{2n-1} = 0$;

б) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)dx = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)dt = -a_0$; $a_0 = 0$.

$a_{2n} = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nxdx = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\cos 2n(t-\pi)dx = -a_{2n}$. Отсюда имеем $a_{2n} = 0$.

Упражнение. Повторяя соответствующую выкладку, покажите, что $b_{2n} = 0,\ n \in \mathbb{N}$.

7. Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } |x| < \alpha, \\ 0 \text{ при } \alpha \leqslant |x| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Исходя из равенства Парсеваля, найти сумму рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

Как показано в §10, в случае тригонометрической системы для каждой функции f, интегрируемой с квадратом на $[-\pi, \pi]$, справедливо соотношение (равенство Парсеваля) $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. Найдем коэффициенты Фурье данной функции f:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},\ a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} \cos nx dx = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi},\ b_n = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

так как функция f — чётная. Кроме того, $\dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} dx = \dfrac{2\alpha}{\pi}$. Подставив теперь найденные значения в равенство Парсеваля, имеем

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2} = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Откуда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \dfrac{\pi\alpha - \alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

§15. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой или на полупрямой и не является периодической ни с каким периодом, то эту функцию естественно раскладывать не в тригонометрический ряд Фурье, а в так называемый интеграл Фурье. Изучению такого разложения и посвящается настоящий и следующий параграфы.

1. Определение

Рассмотрим некоторые наводящие соображения, которые, не являясь вполне строгими, привели французского математика Жозефа Фурье к его знаменитой интегральной формуле.

Пусть задана периодическая функция $f(x)$ с периодом 2ω, и предположим, что она может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi n x}{\omega} + b_n \sin\dfrac{\pi n x}{\omega}$, где $a_n = \dfrac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\cos\dfrac{\pi n t}{\omega}dt$, $n = 0, 1, \ldots$ и $b_n = \dfrac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\sin\dfrac{\pi n t}{\omega}dt$, $n = 1, 2, \ldots$ Подставив в правую часть указанные значения a_n и b_n, находим $f(x) = \dfrac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\cos\frac{\pi n t}{\omega}dt\cos\frac{\pi n x}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\sin\frac{\pi n t}{\omega}dt\sin\frac{\pi n x}{\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\left[\cos\frac{\pi n t}{\omega}\cos\frac{\pi n x}{\omega} + \sin\frac{\pi n t}{\omega}\sin\frac{\pi n x}{\omega}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\cos\frac{\pi n}{\omega}(t-x)dt\cdot\frac{\pi}{\omega}.$$

Обозначим $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{\omega}$, $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \dfrac{\pi}{\omega}$. В результате имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\cos\lambda_n(t-x)dt\Delta\lambda_n. \tag{40}$$

Потребуем теперь, чтобы функция f была абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$, то есть чтобы сходился интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$. В таком случае $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{1}{2\omega}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt = 0$, так как $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, а ряд, фигурирующий в равенстве (40) можно принять за интегральную сумму, отвечающую разбиению промежутка $[0,+\infty)$ точками λ_n, для функции $I(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$. Совершив, наконец, формальный предельный переход в равенстве (40) при $\omega\to+\infty$, придём к соотношению

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{41}$$

Это и есть *интегральная формула Фурье*. Интеграл, стоящий в правой части равенства (41), называют *интегралом Фурье*.

Отметим, что внутренний интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt=\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{-\omega}^{+\omega} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$$

понимается как несобственный интеграл в смысле главного значения.

Если функция $f(x)$ — чётная на $(-\infty,+\infty)$, то её интеграл Фурье следующим образом отражает данную особенность функции:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{0}^{+\infty}\right) f(t)\cos\lambda(t-x)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda\left(-\int\limits_{+\infty}^{0} f(-t)\cos\lambda(-t-x)dt+\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\left[\cos\lambda(t+x)+\cos\lambda(t-x)\right]dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{0}^{+\infty} \cos\lambda t\cos\lambda x f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\lambda x d\lambda\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\lambda t f(t)dt.$$

В итоге получили

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\lambda x d\lambda\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt. \tag{42}$$

Те же преобразования в случае нечётной функции $f(x)$ приводят к формуле

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt. \tag{43}$$

Упражнение. Докажите формулу (43).

Итак, интеграл Фурье чётной функции содержит только косинусы, а нечётной — только синусы.

Вернёмся к интегральной формуле Фурье (41) и распишем косинус разности:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Big[\cos \lambda x \cos \lambda t + \sin \lambda x \sin \lambda t \Big] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\cos \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt + \sin \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt \right) d\lambda.$$

Обозначив

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \ b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \tag{44}$$

получим

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \Big[a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x \Big] d\lambda. \tag{45}$$

Как видно из равенств (42) и (43), формулы (44) принимают соответственно для чётной и нечётной функций вид

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \ b(\lambda) = 0 \text{ или } a(\lambda) = 0, \ b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Напрашивается сравнение интеграла Фурье в форме (45) с тригонометрическим рядом Фурье (2). Дискретно изменяющийся параметр $k = \ 0, 1, \ldots$ формулы (2) заменяется на непрерывно изменяющийся параметр λ в формуле (45), что приводит к превращению бесконечного ряда в несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Аналогия прослеживается и при сравнении формул (44) для выражений $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и формул (3) для коэффициентов Фурье a_k и b_k. Она показывает, что $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ играют в интеграле Фурье роль коэффициентов Фурье. Прослеживается также аналогия между интегралом Фурье и тригонометрическим рядом Фурье чётной и нечётной функций.

Перейдем, наконец, от наводящих соображений к строгим определениям и формулировкам. Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(-\infty, \infty)$, то есть пусть сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$. Формально составим интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big] d\lambda$, где $a(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt$ и $b(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt$. Будем называть его *интегралом Фурье* функции $f(x)$. Отметим, что в силу неравенств $|f(t)\cos\lambda t| \leqslant |f(t)|$ и $|f(t)\sin\lambda t| \leqslant |f(t)|$ интегралы $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ сходятся, более того, они равномерно сходятся на множестве значений $\lambda \in [0, +\infty)$.

Нас интересует вопрос о представлении функции $f(x)$ её интегралом Фурье. Построение теории интеграла Фурье будет вестись, в основном, по схеме, по которой шло изучение тригонометрических рядов Фурье.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 5. *Если $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(-\infty, +\infty)$, то функции $a(\lambda), b(\lambda) \in \mathbb{C}[0, +\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим $a(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt$. Выберем произвольную точку $\lambda_0 \in [0, +\infty)$ и докажем непрерывность функции в этой точке.

Рассмотрим разность $a(\lambda) - a(\lambda_0) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\lambda t - \cos\lambda_0 t\right) dt$. Разобьем эту разность на три интеграла:

$$a(\lambda) - a(\lambda_0) = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N} f(t)(\cos\lambda t - \cos\lambda_0 t) dt}_{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda t dt}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda_0 t dt}_{I_3}.$$

Заметим, что интеграл $a(\lambda)$ равномерно сходится на $[0,+\infty) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists N, \forall\lambda \in [0,+\infty):$ $\left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda t dt\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Откуда в силу равномерной сходимости $a(\lambda)$ интегралы $|I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|I_3| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Рассмотрим $|I_1| = \left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N} f(t)\left(\cos\lambda t - \cos\lambda_0 t\right)dt\right|$. Так как $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, то $|\cos\lambda t - \cos\lambda_0 t| = 2\underbrace{\left|\sin\dfrac{\lambda-\lambda_0}{2}t\right|}_{\leqslant\left|\frac{\lambda-\lambda_0}{2}\right||t|}\cdot\underbrace{\left|\sin\dfrac{\lambda+\lambda_0}{2}t\right|}_{\leqslant 1} \leqslant |\lambda-\lambda_0|\cdot|t|$. Тогда интеграл $|I_1| \leqslant \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}|f(t)|\cdot|\cos\lambda t - \cos\lambda_0 t|\,dt \leqslant |\lambda-\lambda_0|\,\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}|f(t)|\cdot|t|dt \to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$. Следовательно, $|I_1|\to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$. Тогда $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall\lambda: |\lambda-\lambda_0|<\delta \Rightarrow |I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

В итоге имеем $|a(\lambda)-a(\lambda_0)| = |I_1+I_2-I_3| \leqslant |I_1|+|I_2|+|I_3| < \varepsilon$, что означает $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda) = a(\lambda_0)$. А значит, $a(\lambda)\in\mathbb{C}(\lambda_0)$. Так как $\lambda_0\in[0,+\infty)$ — произвольное, то $a(\lambda)\in\mathbb{C}[0,+\infty)$. ■

Упражнение. Аналогично проведите выкладки для функции $b(\lambda)$.

Лемма 6. *Если* $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(-\infty,+\infty)$, *то* $a(\lambda)$, $b(\lambda)\to 0$ *при* $\lambda\to+\infty$.

Доказательство. Докажем, что $a(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt \to 0$ при $\lambda\to+\infty$. Представим $a(\lambda)$ как сумму двух интегралов

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda t dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N} f(t)\cos\lambda t dt = I_1 + I_2.$$

По лемме Римана об осцилляции $|I_2| = \left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-N}^{N} f(t)\cos\lambda t dt\right| \to 0$ при $\lambda\to\infty$. Это означает, что $\forall\varepsilon>0, \exists\Delta>0, \forall\lambda: |\lambda|>\Delta \Rightarrow |I_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, в силу равномерной сходимости $a(\lambda)$ на множестве $\lambda\in[0,+\infty)$ (см. конец предыдущего параграфа) $\forall\varepsilon>0, \exists N:$ $\left|\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda t dt\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\forall\lambda \in [0,+\infty) : |I_1| = \left|\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{|t|\geqslant N} f(t)\cos\lambda t dt\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta > 0,\ \forall\lambda \in [0,+\infty) :\ \lambda > \Delta \Rightarrow |a(\lambda)| \leqslant |I_1| + |I_2| < \varepsilon$, что равносильно утверждению $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) = 0$. ■

Упражнение. Аналогично проведите доказательство для функции $b(\lambda)$.

3. Сходимость интеграла Фурье в точке

Пусть $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(-\infty,+\infty)$. Тогда данной функции соответствует интеграл Фурье $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda$. По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda.$$

Обозначим $I(A,x) = \displaystyle\int\limits_0^{A}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda$. Этот интеграл существует, так как по лемме 5 функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ непрерывны, а значит, подынтегральная функция непрерывна. Подставив значения $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и поменяв порядок интегрирования, имеем

$$I(A,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{A}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int\limits_0^{A}\cos\lambda(t-x)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x)}{(t-x)}\bigg|_0^A dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x)}{(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{+\infty}^{0}f(x-t)\frac{\sin At}{t}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(x+t)\frac{\sin At}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big[f(x-t)+f(x+t)\Big]\frac{\sin At}{t}dt.$$

Таким образом, получаем

$$I(A,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big[f(x-t)+f(x+t)\Big]\frac{\sin At}{t}dt \ (A>0). \qquad (46)$$

Упражнение. Обоснуйте законность перемены порядка интегрирования (см. [10, §2.5]).

Вспомним, что при $A > 0$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ (см. [10, §2.6]). Тогда $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt = 1$.

Пусть $f(t)$ кусочно непрерывная функция на любом конечном отрезке числовой прямой. Обозначим $s_0 = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Если x — точка непрерывности, то пределы слева и справа совпадают:

$$f(x+0) = f(x-0) = f(x) = s_0.$$

Теорема 15 (о сходимости интеграла Фурье). *Если выполнены условия*
1) $f \in \overline{\mathcal{L}}_1(-\infty,+\infty)$*;*
2) f *кусочно непрерывна на любом конечном отрезке;*
3) в точке x *функция* f *имеет обобщённые левые и правые производные,*
то интеграл Фурье $\int\limits_0^{+\infty}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda$ *сходится в точке* x *к значению* $s_0 = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Умножив обе части равенства $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt = 1$ на s_0, получим $\frac{2s_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt = s_0$ и рассмотрим разность

$$I(A,x) - s_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big[f(x-t)+f(x+t)\Big]\frac{\sin At}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}2s_0\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \Big[f(x-t) + f(x+t) - f(x+0) - f(x-0) \Big] \frac{\sin At}{t} dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{N} \left[\frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} + \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \right] \sin Atdt}_{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_N^{+\infty} \Big[f(x-t) + f(x+t) \Big] \frac{\sin At}{t} dt}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int\limits_N^{+\infty} \Big[f(x+0) + f(x-0) \Big] \frac{\sin At}{t} dt}_{I_3},$$

где N будет определено несколько позднее, а пока оно произвольно. Оценим каждый из интегралов.

Так как интеграл $\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt$ сходится, то для

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N : \ \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_N^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3|f(x+0) + f(x-0)|}.$$

Откуда $|I_3| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_N^{+\infty} \Big[f(x+0) + f(x-0) \Big] \frac{\sin At}{t} dt \right| \leqslant$

$$\leqslant \Big| f(x+0) + f(x-0) \Big| \cdot \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_N^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{N} \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \right] \sin Atdt.$$

Обозначим $g(t) = \dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t} - \dfrac{f(x-t) - f(x-0)}{-t}$. Первое слагаемое в разности стремится при $t \to +0$ к обобщенной правой производной функции f, а второе — к обобщенной левой производной. Значит, функция $g(t)$ ограничена на некотором интервале $(0, \delta)$, а на остальной части $g(t)$ будет кусочно непрерывна как линейная комбинация кусочно непрерывных функций. Следовательно, особых точек наша функция иметь не будет и $g \in \overline{\mathcal{L}}_1[0,N]$. Тогда к I_1 можно применить лемму Римана об осцилляции, то есть $I_1 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^N g(t)\sin Atdt \to 0$ при $A \to +\infty$. Значит, для $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta > 0,\ \forall A > \Delta : |I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Рассмотрим интеграл $I_2 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_N^{+\infty} \dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{t}\sin Atdt$. Функция $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{t}$ особых точек не имеет и кусочно непрерывна. Значит, в силу неравенства $\left|\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{|f(x+t)|+|f(x-t)|}{N}$ функция $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{t} \in \overline{\mathcal{L}}_1[N,+\infty)$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{t},\ t \in [N,+\infty), \\ 0,\ t \in (-\infty,N). \end{cases}$$

Тогда $I_2 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\sin Atdt$. К этому интегралу применяем лемму 6: $I_2 \to 0$ при $A \to +\infty$, что равносильно $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta > 0,\ \forall A > \Delta : |I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

В итоге $|I(A,x) - s_0| = |I_1 + I_2 - I_3| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| < \varepsilon$. Другими словами, получили $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta > 0,\ \forall A > \Delta : |I(A,x) - s_0| < \varepsilon$, что означает $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A,x) = s_0$. Это и есть сходимость интеграла Фурье. ■

Следствие. *При выполнении условий теоремы 15 и непрерывности функции f в точке x интеграл Фурье равен значению функции $f(x)$, то есть имеет место равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty}\Big[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x\Big]d\lambda = f(x).$$

Пример. Представим интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ |x| < a, \\ 0,\ |x| > a. \end{cases}$$

Она является чётной. Тогда $a(\lambda) = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^a + \int\limits_a^{+\infty}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^a \cos\lambda t dt = \frac{2}{\pi}\left.\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right|_0^a = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Таким образом, имеем соответствие $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda \sim f(x)$.

Проверим, что на самом деле имеет место равенство $\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda = f(x)$. В этом легко убедиться, проверив выполнимость условий теоремы 15, но гораздо интереснее непосредственно вычислить интеграл в левой части.

Так как $\sin\lambda a\cos\lambda x = \dfrac{1}{2}\Big[\sin\lambda(a-x) + \sin\lambda(a+x)\Big]$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin\alpha t}{t}dt = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sign}\ \alpha$ (см. [10, §2.6]), то имеем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(a-x)}{\lambda}d\lambda + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(a+x)}{\lambda}d\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{sign}(a-x) + \mathrm{sign}(a+x)\Big] = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & |x| = a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

А это и есть исходная функция $f(x)$ во всех точках, за исключением $|x| = a$.

§16. Комплексная форма записи интеграла Фурье

Пусть выполнены все условия теоремы 15 о сходимости интеграла Фурье на всей числовой прямой. Тогда $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$.

Рассмотрим $F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$. Функция $F(\lambda)$ является чётной по переменной λ. Тогда в силу её четности можно записать

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt. \tag{47}$$

С другой стороны, введем функцию $G(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$. Функция $G(\lambda)$ — нечётная по переменной λ. Тогда $\int\limits_{-N}^{N} G(\lambda)d\lambda=0$. Откуда следует, что существует $\lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N} G(\lambda)d\lambda=0$. Другими словами, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda)d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt=0$ в смысле главного значения. Итак, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt=0. \tag{48}$$

Умножим равенство (48) на $(-i)$ и сложим с равенством (47):

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\underbrace{\Big[\cos\lambda(t-x)-i\sin\lambda(t-x)\Big]}_{e^{-i\lambda(t-x)}}dt.$$

Тогда согласно формуле Эйлера имеем:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \tag{49}$$

или

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,\ \text{где}\ c(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{50}$$

Упражнение. Сравните равенства (50) с комплексной формой записи ряда Фурье $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, где $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$.

§17. Понятие о преобразовании Фурье

Вернёмся к представлению (49)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Если ввести обозначение

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{51}$$

то равенство (49) примет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{52}$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется *образом Фурье* или *спектральной характеристикой* функции $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$, а переход от функции f к $\hat{f}$ называется *преобразованием Фурье*.

Отображение, заданное интегралом

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{53}$$

называется *обратным преобразованием Фурье*. Формула (52) возвращает нас от $\hat{f}$ к f, что объясняет происхождение термина "обратное преобразование Фурье".

Наряду с преобразованием Фурье, которое применяется к функциям, определенным на всей числовой оси, широко используются косинус– и синус–преобразования Фурье для функций, заданных на числовой полупрямой. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[0, +\infty)$, то её можно продолжить на всю числовую прямую чётным или нечётным образом. Легко понять, что при чётном продолжении непрерывность сохраняется во всех точках, а при нечётном продолжении она сохраняется всюду, кроме точки $x = 0$, в которой непрерывность имеет место только при выполнении условия $f(0) = 0$. Как уже известно, чётно продолженная функция f может быть представлена в точках непрерывности косинус–интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt.$$

Положим по определению

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt. \tag{54}$$

Функцию $\hat{f}_c(\lambda)$ будем называть *косинус–образом Фурье* функции f, а преобразование, переводящее f в $\hat{f}_c$ назовем *косинус–преобразование Фурье*. Тогда соотношение (42) будет выглядеть так:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \tag{55}$$

Преобразование, определяемое правой частью этого равенства, переводит функцию $\hat{f}_c$ в f. Поэтому будем называть его *обратным косинус–преобразованием Фурье*.

В случае нечётного продолжения функция f выражается повторным интегралом

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Обозначим

$$\hat{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt. \tag{56}$$

Тогда имеем

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda. \tag{57}$$

Функцию $\hat{f}_s(\lambda)$ назовём *синус–образом Фурье* функции f, а переход от f к $\hat{f}_s$ называется *синус–преобразованием Фурье*. Так как правая часть равенства (57) возвращает нас от функции $\hat{f}_s$ к f, то отображение, определяемое этой правой частью, называется *обратным синус–преобразованием Фурье*.

Из вышесказанного вытекает важный вывод. Если равенство (51) рассматривать как уравнение относительно f, то соотношение (52) дает его решение. Точно так же равенства (54) и (56) можно считать уравнениями относительно f, а соотношения (55) и (57) соответственно дают их решения. Это позволяет использовать преобразование Фурье, а также косинус– и синус–преобразования Фурье, для вычисления несобственных интегралов по бесконечному промежутку, что будет продемонстрировано ниже на примерах.

Замечание. Стоит еще отметить, что в силу формул Эйлера, связывающих показательную функцию с тригонометрическими функциями, преобразование Фурье вещественнозначной функции f есть функция комплекснозначная. Легко проверить, что для чётной функции преобразование Фурье совпадает с косинус–преобразованием Фурье, а для нечётной — синус–преобразование получается из преобразования Фурье умножением на мнимую единицу.

Упражнение. Обоснуйте последнее замечание.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$ Найдем преобразование Фурье. В силу четности данной функции воспользуемся косинус–преобразованием Фурье:

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{a} \cos\lambda t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\bigg|_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\lambda a}{\lambda}.$$

2. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$. В силу четности функции рассмотрим

$$\hat{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma|t|}\cos\lambda t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\cos\lambda t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{I}.$$

Для вычисления $\mathcal{I}$ дважды проинтегрируем интеграл по частям: $\left(u = e^{-\gamma t},\ du = -\gamma e^{-\gamma t}dt,\ dv = \cos\lambda t dt,\ v = \dfrac{\sin\lambda t}{\lambda}\right)$

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\cos\lambda t dt = e^{-\gamma t}\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{\gamma}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\sin\lambda t dt =$$

$$= \frac{\gamma}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\sin\lambda t dt, \left(u = e^{-\gamma t},\ du = -\gamma e^{-\gamma t}dt,\ dv = \sin\lambda t,\ v = -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\right)$$

$\mathcal{I} = -\dfrac{\gamma}{\lambda^2}e^{-\gamma t}\cos\lambda t\bigg|_0^{+\infty} - \dfrac{\gamma^2}{\lambda^2}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma t}\cos\lambda t dt$. Откуда $\mathcal{I} = \dfrac{\gamma}{\lambda^2} - \dfrac{\gamma^2}{\lambda^2}\mathcal{I}$, или

$\mathcal{I}\left(1+\dfrac{\gamma^2}{\lambda^2}\right)=\dfrac{\gamma}{\lambda^2}$, $\mathcal{I}=\dfrac{\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}$. Тогда $\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\gamma}{\gamma^2+\lambda^2}$.

Проще найти преобразование Фурье, используя комплексную форму записи интеграла Фурье:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\gamma|t|}e^{-i\lambda t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{(\gamma-i\lambda)t}dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(\gamma+i\lambda)t}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\gamma-i\lambda}e^{(\gamma-i\lambda)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\gamma+i\lambda}e^{-(\gamma+i\lambda)t}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\gamma-i\lambda}+\frac{1}{\gamma+i\lambda}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\gamma}{\gamma^2+\lambda^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\gamma}{\gamma^2+\lambda^2}.$$

Так как функция $f(x)$ четная, то на промежутке $[0,+\infty)$ преобразование Фурье совпадает с косинус–преобразованием. Таким образом, имеем

$$\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\gamma}{\gamma^2+\lambda^2}.$$

Если теперь воспользоваться формулой (55), то получим

$$e^{-\gamma x}=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\gamma}{\gamma^2+\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda.$$

Откуда

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\gamma^2+\lambda^2}d\lambda=\frac{\pi}{2\gamma}e^{-\gamma x},\ x\geqslant 0. \tag{58}$$

3. Пусть $f(x)=e^{-\gamma x}$, $x\in[0,+\infty)$, $\gamma>0$. Найдём синус–преобразование Фурье функции $f(x)$. Согласно формуле (56) пишем

$$\hat{f}_s(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\gamma t}\sin\lambda t dt.$$

Можно вычислить данный интеграл так же, как был найден аналогичный интеграл в предыдущем примере, дважды применив формулу интегрирования по частям. Есть и другой путь. Продолжим функцию f нечётным образом на интервал $(-\infty,0)$ и сведём вычисление синус–преобразования функции f к нахождению преобразования Фурье продолженной функции

$$f_0(x)=\begin{cases} e^{-\gamma x} \text{ при } x\geqslant 0,\\ -e^{-\gamma x} \text{ при } x<0.\end{cases}$$

На основании соотношения (51) имеем $\hat{f}_0(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{-i\lambda t} dt =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{0} \left(-e^{-\gamma x}\right) \cdot e^{-i\lambda t} dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma x} \cdot e^{-i\lambda t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\gamma - i\lambda)t} dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\gamma + i\lambda)t} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\gamma - i\lambda} e^{-(\gamma - i\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\gamma + i\lambda} e^{-(\gamma + i\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\gamma + i\lambda} - \frac{1}{\gamma - i\lambda} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\lambda i}{\gamma^2 + \lambda^2}.$$

Умножив далее $\hat{f}_0(\lambda)$ на мнимую единицу, получаем

$$\hat{f}_s(\lambda) = i \hat{f}_0(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\gamma^2 + \lambda^2}.$$

Подставляем найденное значение $\hat{f}_s(\lambda)$ в равенство (57) и выводим

$$e^{-\gamma x} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{\gamma^2 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda$$

или

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\gamma^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-\gamma x}, \ x > 0. \tag{59}$$

Интегралы (58) и (59) носят название *интегралов Лапласа.* На примере этих интегралов проиллюстрировано, как можно использовать преобразование Фурье для вычисления несобственных интегралов по бесконечному промежутку.

На этом мы завершаем изучение преобразований Фурье. Мы ограничились лишь рассмотрением элементов указанной теории. В настоящее время теория рядов Фурье уже далеко продвинулась вперед и находит широкое применение как в самой математике, так и в её приложениях.

Заключение

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\omega, \omega]$ и периодически (с периодом $T = 2\omega$) продолжена на всю числовую прямую; пусть $f(x) \in \overline{\mathcal{L}}[-\omega, \omega]$. Разложим эту функцию в ряд Фурье (который в случае дополнительных условий на $f(x)$ — см. теорему 4 — сходится к ней):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\omega} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{\omega}nx}.$$

Функцию $f(x)$ называют *сигналом*, числа $\{a_0, a_n, b_n\}$ или $\{c_n\}$ — *спектром сигнала*, а величину $\dfrac{n}{2\omega}$ — *частотой сигнала* f. В случае периодической функции $f(x)$ её спектр дискретен, то есть состоит из не более чем счетного множества значений.

Если функция не является периодической, то ряд Фурье, как мы знаем, может быть заменен интегралом Фурье функции $f(x)$ и

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \text{ где } g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Функцию $f(x)$ можно по-прежнему называть *сигналом*, а функцию $g(\lambda)$ — *спектром сигнала* (в данном случае спектр непрерывен) и λ — *частотой сигнала* f. На практике важной задачей является задача восстановления сигнала по спектру. Подробнее приложения рядов Фурье рассмотрены в [9].

Разложение функции на гармонические составляющие, то есть вычисление коэффициентов Фурье, принято называть *спектральным анализом*. А воссоздание функции, представленной рядом Фурье, называют *спектральным синтезом*.

Многие новейшие системы компьютерной математики (СКМ) такие, как Mathcad, MATLAB и Mathematica, имеют реализации как дискретного, так и непрерывного преобразований Фурье.

На обложке изображена спектрограмма обратного преобразования Фурье сигнала

$$f(t) = \begin{cases} 2\sin 20\pi t + 2\sin 100\pi t, \ t \in [0; 0,5] \cup [0,512; 1], \\ 2\sin 20\pi t, \ t \in (0,5; 0,512) \end{cases}$$

из работы Бурнаева Е.В. "Применение вейвлет–преобразования для анализа экономических временных рядов".

Список рекомендуемой литературы

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 1999. — 695 с.

2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. — М.: Физматлит, 2002. — 512 с.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: изд. МГУ, 1997. — 624 с.

4. Жук В.В., Натансон Г.И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. — Л.: изд. ЛГУ, 1983. — 186 с.

5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. — М.: изд. МГУ, 1987. — 357 с.

6. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. — М.: Дрофа, 2004. Т. 2. — 720 с.

7. Никольский С.М. Курс математического анализа. — М.: Наука, 1983. Т.2. — 448 с.

8. Тучинский Л.И., Шнейберг И.Я. Основы многомерного математического анализа. — Ижевск: Изд-во Удмуртский университет, 2010. — 544 с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1966. Т. 3. — 656 с.

10. Интегралы, зависящие от параметра: учеб.–метод. пособие/ сост. Н. В. Латыпова. — Ижевск: Изд-во Удмуртский университет, 2007. — 57 с.

Учебное издание

Латыпова Наталья Владимировна
Тучинский Лев Исаакович

Ряды Фурье
Учебно–методическое пособие

Напечатано в авторской редакции с оригинал–макета заказчика
Компьютерный набор и верстка Н. В. Латыпова
В оформлении обложки использована спектрограмма из работы Бурнаева Е.В. "Применение вейвлет–преобразования для анализа экономических временных рядов"
Подписано в печать 00.00.11. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 4,65 Уч.-изд.л. 3,35 Тираж 50 экз.
Заказ № Печать офсетная.
Издательство "Удмуртский университет"
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.